Calcul diferențial şi integral

Coordonator: Paul FLONDOR

Radu GOLOGAN, Vasile IFTODE,
Gavriil PĂLTINEANU, Mircea OLTEANU,
Antonela TOMA, Tania-Luminiţa COSTACHE,
Jenică CRÎNGANU, Marcel ROMAN,
Monica BURLICĂ, Vilhelm KECS

Prefaţă

Cartea de faţă a fost elaborată în cadrul proiectului "Formarea cadrelor didactice universitare şi a studenţilor în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învăţare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competenţe performante şi practice pentru piaţa muncii", POSDRU/56/1.2/S/32768. Finanţat din Fondul Social European şi implementat de către Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni şi Companii, Universitatea din Bucureşti, Universitatea Tehnică de Construcţii din Bucureşti, Universitatea "Politehnica" din Bucureşti, Universitatea din Piteşti, Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iaşi, Universitatea de Vest din Timişoara, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea "1 Decembrie 1918" din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operaţional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane - POSDRU şi se înscrie în domeniul major de intervenţie 1.2 Calitate în învăţământul superior.

Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerinţele pieţei muncii şi crearea de mecanisme şi instrumente de extindere a oportunităţilor de învăţare. Evaluarea nevoilor educaţionale obiective ale cadrelor didactice şi studenţilor legate de utilizarea matematicii în învăţământul superior, masterate şi doctorate precum şi analizarea eficacităţii şi relevanţei curriculelor actuale la nivel de performanţă şi eficienţă, în vederea dezvoltării de cunoştinţe şi competenţe pentru studenţii care învaţă discipline matematice în universităţi, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea şi armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigenţelor de pe piaţa muncii, elaborarea şi implementarea unui program de formare a cadrelor didactice şi a studenţilor interesaţi din universităţile partenere, bazat pe dezvoltarea şi armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne şi funcţionale pentru predarea-învăţarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învăţământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca raspuns materialul de faţă. Formarea de competenţe cheie de matematică şi informatică presupune crearea de abilităţi de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială şi inserţie pe piaţa muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea şi sprijinirea elevilor şi studenţilor potenţial talentaţi la matematică. Totuşi, studiul matematicii a evoluat în exigenţe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învăţare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă. În acest context, analiza flexibilităţii curriculei, însoţită de analiza metodelor şi instrumentelor folosite pentru identificarea şi motivarea studenţilor talentaţi la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerinţelor de masă, cât şi celor de elită.

Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societăţii în legătură cu rolul şi locul matematicii în educaţia de bază în instrucţie şi în descoperirile ştiinţifice menite să îmbunătăţească calitatea vieţii, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, şi nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmăreşte evidenţierea a noi motivaţii solide pentru învăţarea şi studiul matematicii atât la nivelele de bază, cât şi la nivel de performanţă; stimularea creativităţii şi formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise faţă de însuşirea aspectelor specifice din alte ştiinţe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări interdisciplinare şi multidisciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenţi ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanţă a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Cuprins

Capitolul 1

Mulţimi şi relaţii

Presupunem cunoscute noţiunile de mulţime şi operaţiile elementare cu mulţimi ca şi noţiunile fundamentale de funcţie şi de compunere a funcţiilor.

Relaţie binară . O relaţie (binară) pe o mulţime E este o submulţime a produsului cartezian $E \times E$.

Relaţie de ordine. O relaţie R pe E este o relaţie de ordine dacă :

i) $(x, y) \in R$ pentru orice $x \in R$ (reflexivitate).

ii) $(x, y) \in R$ şi $(y, x) \in R$ implică $x = y$ (antisimetric).

iii) $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$ implică $(x, z) \in R$ (tranzitivitate).

Se foloseşte, în general, notaţia xRy în loc de $(x, y) \in R$.

Exemple.

i) Relaţia de incluziune între submulţimile unei mulţimi.

ii) Relaţia de "$\leq$" pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

In cele ce urmează ne vom limita la această , din urmă , relaţie de ordine.

Majorant, minorant, margine superioară , margine inferioară . Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este o submulţime nevidă , un număr $a \in \mathbb{R}$ este un **majorant** al mulţimii A dacă $x \leq a$ pentru orice $x \in A$ (similar se obţine noţiunea de **minorant**). Cel mai mic maorant (dacă există !) al mulţimii A se numeşte **marginea superioară a mulţimii** A şi se notează $\sup A$ (analog, cel mai mare minorant al mulţimii A este marginea inferioară a mulţimii A notată $\inf A$). O mulţime care are majoranţi (minoranţi) se zice **mărginită superior (mărginită inferior)**. O mulţime mărginită superior şi inferior se zice **mărginită** .

Exemple.

i) Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ nu este mărginită superior, dar este mărginită inferior.

ii) Intervalul $A = [0, 1)$ este o mulţime mărginită şi $\sup A = 1, \inf A = 0$.

Este importantă caracterizarea: $s = \sup A$ dacă şi numai dacă $x \leq s$ pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ exstă $a \in A, s - \varepsilon < a \leq s$.

O proprietate fundamentală a mulţimii numerelor reale este:
Axioma marginii superioare.
In $\mathbb{R}$ orice mulţime nevidă, mărginită superior are margine superioară . (termenul ”axiomă ” trebuie luat în sensul unei posibile construcţii axiomatice a mulţimii numerelor reale, dar practic vom interpreta cele spuse ca un rezultat pe care îl acceptăm fără demonstraţie).

Exerciţiu. Să se arate (folosind axioma de mai sus) că orice mulţime nevidă , mărginită inferior are margine inferioară .

Lema intervalelor închise incluse. Fie $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$ un şir de intervale închise incluse. Atunci intersecţia $\bigcap [a_n, b_n]$ este nevidă .

In plus, dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, atunci intersecţia este redusă la un singur număr real.

Demonstraţie. Dacă a este marginea superioară a extremităţilor stângi , iar b marginea inferioară a extremităţilor drepte ale intervalelor, atunci $a \leq b$ şi $[a, b] \subseteq \bigcap [a_n, b_n]$ etc. □

Numărabilitate. O mulţime E (nu neapărat de numere) se zice **numărabilă** dacă există (cel puţin) o bijecţie între mulţimea numerelor naturale şi mulţimea E. Cu alte cuvinte, E este numărabilă dacă elementele sale se pot aranja într-un şir.

Exemple.

i) Orice submulţime infinită a mulţimii numerelor naturale este numărabilă (se ştie că orice mulţime nevidă de numere naturale are cel mai mic element; astfel dacă $A \subseteq \mathbb{N}$ este infinită , aranjăm elementele din A într-un şir luând cel mai mic element a din A, apoi cel mai mic element din mulţimea $A \setminus \{a\}$ etc.

ii) Mulţimea $\mathbb{Z}$ a întregilor este numărabilă .

iii) Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este numărabilă .

iv) Fie A o mulţime finită nevidă . Un şir finit de elemente din A se numeşte **cuvânt** peste A. Mulţimea cuvintelor peste A este numărabilă .

Teorema 1.1. *Dacă $\mathcal{P}(X)$ este mulţimea părţilor unei mulţimi X, atunci nu există nicio aplicaţie surjectivă de la X la $\mathcal{P}(X)$.*

Demonstraţie. Prin absurd fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjectivă şi
$E = \{x; x \in X, x \notin f(x)\}$. Există a astfel încât $f(a) = E$. Atunci dacă $a \in f(a)$ rezultă $a \notin f(a)$; dacă $a \notin f(a)$ rezultă $a \in f(a)$. Această contradicţie arată că nu poate exista o astfel de surjecţie. □

Exemplu. O mulţime de cuvinte peste o mulţime A se numeşte limbaj (peste A). Din teorema de mai sus deducem că mulţimea limbajelor nu este numărabilă .

Teorema 1.2. *Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale* ***nu este numărabilă*** *.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că mulţimea $[0, 1]$ nu este numărabilă Dacă ar fi, putem aranja numerele din interval într-un şir $(x_n)_{n\in N}$. Impărţim intervalul în trei părţi egale. Fie $[a_1, b_1]$ una dintre părţi astfel încât $x_1 \notin [a_1, b_1]$; împărţim $[a_1, b_1]$ în trei părţi egale şi fie $[a_2, b_2]$ astfel încât $x_2 \notin [a_2, b_2]$ etc. Prin inducţie se obţine un şir de intervale închise incluse a căror intersecţie este redusă la un singur număr (lema intervalelor închise incluse) din $[0, 1]$. Din construcţia făcută rezultă că acest număr nu se găseşte în şirul $(x_n)_n$, deci contradicţie. $\square$

Capitolul 2

Spaţiul $\mathbb{R}^n$

Prin definiţie, $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$. Pentru o mai bună înţelegere precizăm că : dacă $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, atunci $x = y$ dacă şi numai dacă $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$,..., $x_n = y_n$ (în mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$).

In particular: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (dreapta reală), $\mathbb{R}^2$ este planul (euclidian), iar $\mathbb{R}^3$ "spaţiul".

Având în vedere structura algebrică definită de operaţiile mai jos introduse vom numi mulţimea $\mathbb{R}^n$ **spaţiul euclidian n-dimensional** şi elementele sale **puncte** sau **vectori**. In acest context, numerele reale x_1,x_2,...,x_n sunt **componentele** lui x. Să mai precizăm că , în cazul planului ($\mathbb{R}^2$), vom nota x, y componentele (deci vom scrie, de exemplu, a= (x,y)), iar în cazul $\mathbb{R}^3$ vom nota componentele cu x ,y ,z etc. Aceste notaţii sunt tradiţionale şi au avantajul simplificării notaţiilor indiciale.

Adunare. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, definim $x + y \in \mathbb{R}^n$ prin $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

Inmulţire cu scalari. Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ definim $\alpha x \in \mathbb{R}^n$ prin $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.

Se poate arăta, cu uşurinţă , că $\mathbb{R}^n$ împreună cu aceste două operaţii formează un **spaţiu vectorial** (peste $\mathbb{R}$) de dimensiune n. In particular, $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$. Vom nota (ambiguu) 0 vectorul $(0, 0, ..., 0)$ şi-l vom numi origine. Vectorii $e_1 = (1, 0, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^n$ numită **baza canonică** . Componentele unui vector coincid cu **coordonatele** acestuia în baza canonică .

Produs scalar. Dacă x,$y \in \mathbb{R}^n$ definim $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$.

Normă . Dacă $x \in \mathbb{R}^n$ definim $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ (se observă că pentru n=1 se regăseşte modulul unui număr real).

Inegalitatea lui Cauchy. $|x \cdot y| \leq \|x\| \ \|y\|$ pentru orice x,$y \in \mathbb{R}^n$.

Proprietăţile normei. Pentru orice x,$y \in \mathbb{R}^n$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\|$ =0 ; $\|x\|$=0 dacă şi numai dacă x=0.

2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

In timp ce i) şi iii) se obţin cu uşurinţă , demonstraţia lui ii) foloseşte inegalitatea lui Cauchy.

Distanţa (euclidiană). Dacă $x,y \in \mathbb{R}^n$ se defineşte d(x,y) = $\|x-y\|$.

In plan, distanţa dintre două puncte reprezintă lungimea segmentului de dreaptă care uneşte cele două puncte (distanţa din geometria analitică). Analog în spaţiu. Se observă că norma unui vector este distanţa acestuia la origine. Din proprietăţile normei rezultă , fără dificultate, proprietăţile de bază ale distanţei:

Proprietăţile distanţei. Pentru orice $x,y,z \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$.

2. $d(x,y) = d(y,x)$.

3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Ultima proprietate poartă numele de **inegalitatea triunghiului** preluând astfel numele unei binecunoscute inegalităţi din geometria plană .

Impreună cu distanţa introdusă , $\mathbb{R}^n$ este un **spaţiu metric**. In general, un spaţiu metric este o mulţime pe care s-a introdus o funcţie (de perechile de elemente din mulţime) care satisface condiţiile i), ii). iii) de mai sus (verifică "proprietăţile distanţei").

Capitolul 3

Elemente de topologie a spaţiului $\mathbb{R}^n$

Bilă deschisă . Dacă $a \in \mathbb{R}^n$ şi $r>0$, **bila deschisă de centru** a **şi de rază** r este $B(a,r) = \{x; x \in \mathbb{R}^n, d(x,a) < r\}$.

In $\mathbb{R}$ bilele deschise sunt intervale deschise, în $\mathbb{R}^2$ discuri fără circumferinţa care le mărgineşte, iar în $\mathbb{R}^3$ bile fără sfera care le mărgineşte. Astfel, de exemplu, în $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \in B(0,1)$ dacă şi numai dacă $x^2+y^2<1$; în $\mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \in B(0,1)$ dacă şi numai dacă $x^2+y^2+z^2<1$.

Bilă închisă . Dacă $a \in \mathbb{R}^n$ şi $r>0$, **bila închisă de centru** a **şi de rază** r este B$(a,r)=\{x\ ;\ x \in \mathbb{R}^n,$ d$(x,a) \leq r\}$.
Astfel, în $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \in$B(0,1) dacă şi numai dacă $x^2+y^2 \leq 1$ etc.

Vecinătate. O mulţime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ este o **vecinătate** a punctului $a \in \mathbb{R}^n$ dacă există B$(a,r) \subseteq V$ (o vecinătate a lui a este o mulţime care conţine o bilă deschisă centrată în a).
Este evident că orice vecinătate a unui punct conţine punctul respectiv şi că orice bilă (deschisă sau nchisă) centrată în a este o vecinătate a lui a. De asemenea se observă , fără dificultate, că intersecţia a două vecinătăţi ale unui punct este o vecinătate a acelui punct. Ideea de vecinătate se leagă de studiul proprietăţilor "locale" ale funcţiilor.

Mulţime deschisă . O submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este **deschisă** (în $\mathbb{R}^n$) dacă pentru orice $a \in$A există B$(a,r) \subseteq A$.

Mulţimea vidă $\emptyset$ şi întreg spaţiul $\mathbb{R}^n$ sunt deschise. Un exerciţiu simplu arată că orice bilă deschisă este o mulţime deschisă .

Mulţime închisă . O submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este **închisă** (în $\mathbb{R}^n$) dacă multţimea $\mathbb{R}^n \setminus A$ (complementara mulţimii A) este o mulţime deschisă .

Evident, $\emptyset$ şi $\mathbb{R}^n$ sunt închise. Se arată că bilele închise sunt mulţimi închise.

Şir convergent. Şirul $(x_j)_j$ în $\mathbb{R}^n$ are **limita** $x \in \mathbb{R}^n$ (se scrie $x_j \longrightarrow x$) dacă : $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ J_\varepsilon$ astfel încât dacă $j \geq J_\varepsilon$ să rezulte $d(x_j, x) < \varepsilon$.

Un şir care are limită se zice **convergent**.

Se observă că din $x_j \longrightarrow x$ şi $x_j \longrightarrow y$ rezultă $x=y$ (unicitatea limitei). Forma "geometrică " a definiţiei limitei (cum rezultă cu uşurinţă) este: pentru orice bilă deschisă centrată în x există un rang astfel încât termenii de rang mai mare ai şirului aparţin bilei. Se remarcă folosirea exclusivă a distanţei pentru definiţia limitei; deci această definiţie poate fi dată în orice spaţiu metric. Evident, în cazul $\mathbb{R}$ definiţia de mai sus coincide cu cea dată , în liceu, pentru şiruri de numere reale. Convergenţa şirurilor în $\mathbb{R}^n$ se reduce la convergenţa (simultană a mai multor) şirurilor în $\mathbb{R}$. Vom descrie acest fenomen doar în cazul particular $\mathbb{R}^2$ pentru a evita complicarea scrierii din cauza indicilor. Rezultatul este valabil în cazul general.

Propoziţia 3.1. *$(x_k, y_k) \longrightarrow (x, y)$ în $\mathbb{R}^2$ dacă şi numai dacă $x_k \longrightarrow x$ şi $y_k \longrightarrow y$ în $\mathbb{R}$.*

Demonstraţia se bazează pe inegalităţile $|x|, |y| \leq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq |x| + |y|$ pentru orice numere reale x,y.

Este uşor de generalizat inegalităţile de mai sus la cazul general $\mathbb{R}^n$.
In fond, putem afirma că atât convergenţa cât şi limita sunt "pe componente".

Punct aderent unei mulţimi. Un punct $a \in \mathbb{R}^n$ este aderent mulţimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă există un şir de puncte din A cu limita a.
Desigur, orice punct din A este aderent mulţimii A (se poate lua un şir constant etc.). Este simplu de văzut că 0 este aderent intervalului deschis $(0, 1)$ dar nu aparţine acestui interval.

Legătura dintre puncte aderente şi mulţimi închise este dată de :

Teorema 3.1. *O submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este închisă dacă şi numai dacă pentru orice punct a aderent mulţimii A avem $a \in A$.*

Frontieră . Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se defineşte **frontiera** FrA a mulţimii A ca fiind mulţimea punctelor aderente atât mulţimii A cât şi mulţimii $\mathbb{R}^n \setminus A$. FrA este o mulţime închisă .

Vom reveni cu noţiuni importante de topologie în capitolul următor.

Capitolul 4

Funcţii continue

In studiul calculului diferenţial al funcţiilor de mai multe variabile vom considera funcţii $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sau, mai general, funcţii f : A$\longrightarrow \mathbb{R}^m$, unde A este o submulţime în $\mathbb{R}^n$. Ca un prim exemplu de astfel de funcţii, util în cele ce urmează , vom considera **proiecţiile canonice** ale spaţiului $\mathbb{R}^n$.

Proiecţii canonice. Pentru *i=1,2,..n* vom nota p_i funcţia, definită pe $\mathbb{R}^n$ şi cu valori în $\mathbb{R}$, $p_i(x_1,x_2,...,x_n)=x_i$ şi o vom numi **proiecţia canonică de ordin *i***. Este clar că proiecţiile canonice sunt funcţii liniare.

Componentele unei funcţii. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (A$\subseteq\mathbb{R}^n$). Pentru fiecare *j=1,2...m* definim $f_j : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ prin $f_j = p_j \circ f$, unde p_j este proiecţia canonică de ordin j în $\mathbb{R}^m$, iar "$\circ$" reprezintă compunerea funcţiilor.

Funcţiile f_j sunt **componentele** funcţiei f ; se scrie $f=(f_1,f_2,...f_m)$.

Pentru a lămuri mai bine cele spuse să notăm cu $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ variabila în $\mathbb{R}^n$ şi cu $y=(\ y_1,y_2,...,y_m)$ variabila în $\mathbb{R}^m$. Dacă , pentru $x \in$A notăm *y=f(x),* atunci se vede că avem $y_1=f_1(x_1,x_2,...,x_n)$, ..., $y_m=f_m(x_1,x_2,...,x_n)$.

In particular rezultă că două funcţii *f,g* : $A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sunt egale dacă şi numai dacă $f_1=g_1$, ..., $f_m=g_m$. Multe proprietăţi ale funcţiilor se reduc la proprietăţi analoage ale componentelor.

Astfel, de exemplu, o funcţie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este liniară dacă şi numai dacă are (toate) componentele liniare.

Funcţie continuă . Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (A$\subseteq \mathbb{R}^n$) şi a$\in$A. Spunem că funcţia f este **continuă** în (punctul) a dacă : $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât dacă $x \in A$, $d(x,a) < \delta_\varepsilon$ să rezulte $d(f(x),f(a)) < \varepsilon$. (s-a notat, pentru simplitate, cu d atât distanţa în $\mathbb{R}^n$ cât şi cea în $\mathbb{R}^m$).

Dacă f este continuă în orice punct din A atunci se zice **continuă pe** A.

Se poate reformula condiţia din definiţia continuităţii într-o formă "geometrică " astfel: pentru orice bilă deschisă $B(f(a),\varepsilon)$ există o bilă deschisă $B(a,\delta_\varepsilon)$ astfel încât dacă $x \in A \cap B(a,\delta_\varepsilon)$ atunci $f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$.

Remarcăm că definiţia continuităţii poate fi dată , fără modificări formale, pentru funcţii definite pe un spaţiu metric cu valori într-un spaţiu metric.

Propoziţia 4.1. *Compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă .*

O caracterizare utilă a continuiăţii este cea cu "şiruri" :

Teorema 4.1. *Funcţia* $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *(*$A \subseteq \mathbb{R}^n$*) este continuă în punctul* $a \in A$ *dacă şi numai dacă pentru orice şir* $(x_k)_k$ *în* A *,* $x_k \longrightarrow a$ *avem* $(f(x_k))_k \longrightarrow f(a)$.

Folosind teorema şi caracterizarea convergenţei şirurilor obţinem:

Corolarul 4.1. *Dacă* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *(*$A \subseteq \mathbb{R}^n$*),* $f=(f_1,f_2,\ldots f_m)$*, atunci* f *este continuă în* $a \in A$ *dacă şi numai dacă funcţiile* $f_1,f_2,\ldots f_m$ *sunt continue în a.*

Exemple.
i) Orice funcţie constantă este continuă .
ii) Fie $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţia "sumă " $s(x,y)=x+y$; s este continuă . In adevăr totul revine, folosind teorema de mai sus, la binecunoscuta afirmaţie "limita sumei este suma limitelor" din teoria şirurilor de numere reale.
iii) Analog pentru funcţia produs.
iv) Dacă $f,g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt continue, atunci funcţiile $f + g$ şi fg sunt continue.
v) Orice funcţie liniară $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă .
vi) Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y)= \frac{xy}{x^2+y^2}$ dacă $(x,y)\neq(0,0)$ şi $f(0,0)=0$. Să arătăm că f nu este continuă în $(0,0)$. In adevăr, fie şirul $(1/n,2/n)_n$ în $\mathbb{R}^2$. Evident, acest şir are limita (0,0). Dar $(f(1/n,2/n))_n=2/5$ pentru orice n şi deci nu tinde la 0. Pe de altă parte, este uşor de văzut că f este continuă în orice alt punct.
Mulţime compactă . O (sub)mulţime $K\subseteq\mathbb{R}^n$ se zice **compactă** orice şir în K are (cel puţin) un subşir convergent cu limita în K.

Teorema 4.2. *Fie* $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *o funcţie continuă şi* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *o mulţime compactă . Atunci* $f(K)=\{ f(x) ; x \in K \}$ *este compactă .*

Demonstraţia este o simplă aplicaţie a definiţiilor, dar rezultatul este important, atât prin faptul că proprietăţile care se păstrează prin continuitate sunt topologic interesante, cât şi prin aplicaţiile la problemele de extrem (optimizare). Pentru a preciza acest ultim aspect este utilă o caracterizare a compacităţii în termeni de mărginire a mulţimilor.

Mulţime mărginită . O submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este mărginită dacă există $M>0$ astfel încât $\|x\| \leq M$ pentru orice $x \in$A.

Teorema 4.3. *O mulţime este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită .*

Pentru cazul dreptei reale $\mathbb{R}$ teorema de mai sus este o variantă a rezultatului cunoscut drept lema lui Cesaro.

Exemple.

i) $\mathbb{R}^n$ nu este compacă .

ii) Orice bilă închisă este compactă .

Teorema 4.4. *(**Weierstrass**). Fie $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $K \subset\mathbb{R}^n$ o mulţime (nevidă) compactă . Atunci f este mărginită şi işi atinge marginile.*

Precizăm că f mărginită înseamnă că f(K) este mărginită în $\mathbb{R}$ iar că f işi atinge marginile înseamnă că f are o cea mai mare şi o cea mai mică valoare pe K.

Uniform continuitate. O funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ($A \subseteq\mathbb{R}^n$) este **uniform continuă** dacă : $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât dacă $x, y \in A$, $d(x, y) < \delta_\varepsilon$, avem $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Semnificaţia definiţiei este că pentru un $\varepsilon > 0$ acelaşi δ_ε este "bun" pentru toate punctele din A. In mod evident o funcţie uniform continuă este continuă . Reciproca nu este, în general, adevărată .

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *f(x)=*x^2 nu este uniform continuă .

Teorema 4.5. *Dacă $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este o funcţie continuă şi $K \subset\mathbb{R}^n$ o mulţime compactă , atunci f este uniform continuă .*

Capitolul 5

Derivate parţiale, diferenţială

In acest capitol vom prezenta elemente de calcul diferenţial pentru funcţii de mai multe variabile. Avem în vedere funcţii definite pe mulţimi deschise (nevide) ale spaţiului $\mathbb{R}^n$.

Direcţie. Se numeşte **direcţie** (în $\mathbb{R}^n$) orice vector $s\in\mathbb{R}^n$ astfel încât $\|s\|=1$.

Exemplu. In $\mathbb{R}$ există doar două direcţii 1 şi -1, în $\mathbb{R}^2$ mulţimea direcţiilor este cercul cu centrul în origine şi de rază 1 iar în $\mathbb{R}^3$ sfera cu centrul în origine şi de rază 1. Vectorii $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ai bazei canonice în $\mathbb{R}^n$ sunt direcţii.

Derivata unei funcţii după o direcţie. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq\mathbb{R}^n$, A deschisă , $a\in$A şi $s\in\mathbb{R}^n$ o direcţie. Spunem că f este **derivabilă în punctul** $\boldsymbol{a}$ **după direcţia** $\boldsymbol{s}$ dacă există şi este finită (i.e număr real) limita:

$$\lim_{t\to0}\frac{f(a+ts)-f(a)}{t}=\frac{df}{ds}(a)$$

(egalitatea fiind o notaţie) ; $\frac{df}{ds}(a)$ este **derivata funcţiei** f **după direcţia** s.

Se observă că $\frac{df}{ds}(a)$ este derivata $\omega'(0)$ a funcţiei $\omega(t)$=f(a+ts) definită într-o vecinătate a lui $0\in\mathbb{R}$. De aici rezultă că derivata după o direcţie are proprietăţile bine cunoscute ale derivatei funcţiilor de o variabilă (regulile de derivare a sumei, produsului etc.). De o deosebită importanţă sunt derivatele după direcţiile bazei canonice.

Derivate parţiale. $\frac{df}{de_i}(a)$ se numeşte **derivata parţială a funcţiei** f **în raport cu variabila** x_i **în punctul** a; $\frac{df}{de_i}(a)$ se notează tradiţional $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Funcţia f are derivate parţiale în punctul a dacă există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, i=1,2...,n. Dacă f are derivate parţiale în orice punct din A atunci spunem că f are derivate parţiale pe A. In acest caz sunt definite funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: $A \longrightarrow \mathbb{R}$, în mod evident.

Derivatele parţiale definite sunt, mai precis, derivate parţiale de ordinul întâi dar cum, în această secţiune nu vom considera alt tip de derivate parţiale vom folosi terminologia de mai sus. Conform definiţiei avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,...,a_i+t,...,a_n)-f(a_1,...,a_i,...,a_n)}{t}$$

Din definiţii, rezultă următoarea regulă "practică " de calcul al derivatei parţiale în raport cu x_i pentru funcţiile "elementare": se ţin "fixe" celelate variabile şi se derivează în raport cu x_i.

Exemplu. i) Fie $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $f(x,y)=x^2y$. Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2$.

ii) Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definită prin $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ dacă $(x,y)\neq(0,0)$ şi $f(0,0)=0$. Folosind definiţia se constată uşor că $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Exemplul ii) de mai sus este interesant de comparat cu un exemplu din Capitolul 3 în care s-a arătat că aceeaşi funcţie nu este continuă în $(0,0)$. Deci existenţa derivatelor parţiale într-un punct nu asigură continuitatea funcţiei în acel punct decât în $\mathbb{R}$ (unde derivata parţială coincide cu derivata obişnuită).

In cazul $\mathbb{R}^2$ vom folosi şi notaţiile f'_x, respectiv f'_y pentru $\frac{\partial f}{\partial x}$, respectiv $\frac{\partial f}{\partial y}$. Analog f'_x, f'_y, f'_z în cazul spaţiului $\mathbb{R}^3$.

Pentru a introduce noţiunea de diferenţială a unei funcţii de mai multe variabile este util să revedem cazul funcţiilor de o variabilă . Dacă f este o funcţie cu valori reale definită într-o vecinătate a punctului a şi derivabilă în a, atunci avem, prin definiţie, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ sau, echivalent, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}=0$ $(*)$. (folosirea lui h n notaţie este oarecum tradiţională în acest context). Funcţia liniară $h\to f'(a)h$ este diferenţiala funcţiei f în punctul a. Reţinem că diferenţiala unei funcţii, într-un punct, este o funcţie (aplicaţie) liniară şi legătura dintre diferenţială şi derivată poate fi exprimată spunând că funcţia este derivabilă într-un punct dacă şi numai dacă este diferenţiabilă în acel punct (adică există o aplicaţie liniară satisfăcând (*)) iar derivata este matricea diferenţialei în baza canonică (a lui). Intuitiv, relaţia (*) poate fi interpretată ca posibilitatea de a "aproxima" funcţia f în vecinătatea punctului a cu funcţia $h\to f(a)+f'(a)h$ (o funcţie afină), sensul aproximării fiind că diferenţa $f(a+h)-(f(a)+f'(a)h)$ tinde la 0 (când h tinde la0) "mai repede" decât h.
Este remarcabil faptul că noţiunea de diferenţială se poate extinde la cazul funcţiilor de mai multe variabile producând efecte notabile.

Diferenţială . Fie f o funcţie definită într-o vecinătate a punctului $a\in\mathbb{R}^n$ şi cu valori în $\mathbb{R}^m$. Funcţia f este **diferenţiabilă în *a*** dacă există o aplicaţie liniară $\lambda:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ astfel încât :

$$(**)\ \lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)\|}{\|h\|}=0$$

(evident, norma de la numitor este cea din $\mathbb{R}^n$ iar la numărător cea din $\mathbb{R}^m$, iar condiţia $h \longrightarrow 0$ în $\mathbb{R}^n$ înseamnă $\|h\| \longrightarrow 0$ n $\mathbb{R}$). Se arată că , dacă există , o aplicaţie liniară care satisface condiţia de mai sus, atunci aceasta este unic determinată . Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul a, vom numi aplicaţia liniară λ **diferenţiala** funcţiei f în punctul a şi o vom nota $Df(a)$.
Matricea diferenţialei în bazele canonice va fi numită **matricea iacobiană** a funcţiei f în punctul a şi se va nota $f^{'}(a)$. Deci $f^{'}(a)$ este o matrice cu m linii şi n coloane. Dacă m=n, atunci determinantul matricei iacobiene se numeşte **iacobianul** funcţiei f în punctul a.
In sfârşit, dacă funcţia f este definită pe mulţimea deschisă A şi este diferenţiabilă în fiecare punct din A spunem că f este **diferenţiabilă pe** A.

Propoziţia 5.1. *Dacă f este diferenţiabilă în a, atunci este continuă în a.*

Demonstraţia rezultă din condiţia (**) şi din faptul că aplicaţiile liniare sunt continue.

Exemple. i) Dacă f este constantă în vecinătatea punctului a, atunci $Df(a)$=0 (adică f este diferenţiabilă în a şi diferenţiala este aplicaţia liniară identic nulă).

ii) Dacă $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este liniară , atunci este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^n$ şi $Df(a)=f$ pentru orice $a \in \mathbb{R}^n$.

iii) Funcţia $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $s(x,y)=x+y$, este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi $Ds(a,b) = s$ în orice punct (a,b) din $\mathbb{R}^2$.

iv) Funcţia p : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $p(x,y)=xy$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi $p'(a,b)=(b,a)$.
Exemplele rezultă din simpla verificare a condiţiei (**). Astfel, pentru iv), avem : $p(a+h,b+k)-p(a,b)-bh-ak=(a+h)(b+k)-ab-bh-ak=hk$ şi $\|(h,k)\|=\sqrt{h^2+k^2}$ şi deducem $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, căci $|hk| \leq h^2+k^2$, ceea ce implică (**).

Vom enunţa principalele rezultate privind diferenţiala şi legătura acesteia cu derivatele parţale. Pentru uşurinţa scrierii vom considera că domeniul de definiţie al funcţiilor este întreg spaţiul.

Teorema 5.1. *(**a funcţiei compuse**). Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}^n$, astfel încât f este diferenţiabilă în a şi g este diferenţiabilă în f(a) $\in \mathbb{R}^m$. Atunci funcţia $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în a şi avem (regula diferenţierii funcţiilor compuse) $Dg \circ f(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$ sau, la nivel de matrice iacobiene, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Teorema 5.2. *Funcţia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f=(f_1,f_2,\ldots f_m)$ este diferenţiabilă în punctul a dacă şi numai dacă funcţiile componente $f_1,f_2,\ldots f_m$ sunt diferenţiabile în punctul a. Componentele diferenţialei sunt diferenţialele componentelor.*

Teorema 5.3. *Dacă funcţia* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *este diferenţiabilă în punctul a, atunci componentele* $f_1, f_2, ...f_m$ *sunt diferenţiabile în punctul a şi* $f'(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=1,..,m \\ j=1,...,n}}$. *(putem identifica liniile matricei iacobiene cu matricele iacobiene ale componentelor).*

Exemplu. In calculul diferenţial se notează , tradiţional, proiecţiile canonice, în $\mathbb{R}^n$, cu $dx_1, dx_2, ..dx_n$. Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenţiabilă în a. Din teorema de mai sus: $Df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 +, ..., + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$.

Această teoremă oferă un "algoritm" pentru stabilirea diferenţiabilităţii unei funcţii într-un punct (considerând doar cazul m=1, la care ne putem reduce): dacă funcţia nu admite derivate parţiale în punctul respectiv, atunci nu este diferenţiabilă iar dacă admite derivate parţiale acestea oferă "candidatul" pentru diferenţială urmând a se decide prin verificarea condiţiei (**).

Pentru o ilustrare simplă să reluăm exemplul iv) de mai sus : avem $\frac{\partial p}{\partial x} = y, \frac{\partial p}{\partial y} = x$ etc.

Combinând teorema precedentă cu teorema funcţiei compuse se obţine o regulă importantă a calculului derivatelor parţiale ale funcţiilor compuse.

Corolarul 5.1. *Fie* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *funcţii diferenţiabile şi* $F = gf$. *Dacă notăm* $x_1, x_2, ..., x_n$ *variabilele în* $\mathbb{R}^n$ *şi cu* $y_1, y_2, ..., y_m$ *variabilele în* $\mathbb{R}^m$ *avem :*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x))\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) + ... + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)$$

pentru orice i=1,2,...n.

Demonstraţia este imediată aplicând teoremele precedente şi ţinând cont de faptul că matricea compunerii a două aplicaţii liniare este produsul matricelor aplicaţiilor care se compun.

Exemplu.

i) O funcţie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este (pozitiv) omogenă de grad $\alpha \in \mathbb{R}$ dacă pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ şi orice $t > 0$ avem $f(tx) = t^\alpha f(x)$ (sau $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, ..., x_n)$). Presupunem că f este diferenţiabilă . Derivând această identitate în raport cu t (folosind corolarul precedent) şi apoi punând t=1 se obţine relaţia lui Euler :

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + ... + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha f(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

ii) Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenţiabilă , $a \in \mathbb{R}^n$ şi s=$(s_1, s_2, ..., s_n)$ o direcţie. Atunci :

$$\frac{df}{ds}(a) = s_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + s2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \ldots + s_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Vectorul $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ se numeşte **gradientul** funcţiei f în punctul a şi se notează $(\mathrm{grad} f)(a)$ sau $(\nabla f)(a)$. Aplicaţia $a \longmapsto (\mathrm{grad} f)(a)$ este un exemplu de **câmp vectorial** şi se notează $\mathrm{grad} f$ sau ∇f.

iii) Fie $(\nabla f)(a) \neq 0$ şi să considerăm direcţia $n_a = (\nabla f)(a)/\|(\nabla f)(a)\|$. Dacă $\varphi(t) = f(a + tn_a)$, atunci avem $\varphi^{'}(0) = \frac{df}{dn_a}(a) = \|(\nabla f)(a)\| > 0$. Intuitiv, φ este restricţia funcţiei f la dreapta care trece prin punctul a şi are direcţia n_a şi rezultatul obţinut arată că "f creşte pe direcţia gradientului, n vecinătatea punctului a". Mai mult, să observăm că (inegalitatea lui Cauchy), pentru orice direcţie s, $\left|\frac{df}{ds}(a)\right| \leq \| (\nabla f)(a \|$.
Acest rezultat simplu este începutul unor tehnici de optimizare numite "metode de gradient". Notaţia $n_a$se explică prin faptul că acest vector este normal (perpendicular pe planul tangent) la (hiper)suprafaţa definită prin ecuaţia $f = 0$. De altfel ecuaţia hiperplanului tangent la hipersuprafaţa $f = 0$ este $(x - a) \cdot (\nabla f)(a) = 0$.
O altă teoremă privind legătura dintre derivatele parţiale şi diferenţială este:

Teorema 5.4. *Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, ...f_m)$ şi $a \in \mathbb{R}^n$ Dacă funcţiile $f_1, f_2, ...f_m$ au derivate parţiale într-o vecinătate a punctului a şi aceste derivate parţiale sunt continue în a, atunci funcţia f este diferenţiabilă în punctul a (şi, evident, matricea iacobiană a funcţiei f în a este matricea derivatelor parţiale ale componentelor).*

O funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A mulţime deschisă nevidă , se zice de **clasă** C^1 **pe** A dacă admite derivate parţiale continue pe A. Cu această terminologie, din teorema de mai sus rezultă că funcţiile de clasă C^1 sunt diferenţiabile. Reciproca nu este adevărată , dar în general, în analiză se lucrează cu funcţii de clasă C^1. Suma, produsul şi compunerea funcţiilor de clas C^1 sunt funcţii de clasă C^1. O funcţie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$este, prin definiţie, de clasă C^1 dacă toate componentele sale sunt de clasă C^1.
Pentru teorema care urmează notăm variabilele în $\mathbb{R}^{n+m}$ cu
$(x_1,x_2,...,x_n,\ y_1,y_2,...,y_m)$.

Teorema 5.5. ***(funcţiilor implicite)****. Fie $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ o funcţie de clasă C^1 în vecinătatea punctului (a,b), astfel încât f(a,b)=0. Dacă $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{\substack{i=1,..,m\\ j=1,...,m}} \neq 0$, atunci există o mulţime deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A$, o mulţime deschisă $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $b \in B$ şi o unică funcţie $g : A \longrightarrow B$, de clasă C^1 astfel încât f(x,g(x))=0 pentru orice $x \in A$ (şi g(a)=b). (evident, $f_1,f_2,...f_m$ sunt componentele funcţiei f).*

Asfel, teorema funcţiilor implicite dă un răspuns problemei rezolvării ecuaţiei $f(x,y)=0$ în sensul obţinerii variabilei y ca funcţie de x. Mai pe larg, avem sistemul de ecuaţii: $f_1(x_1,x_2,...,x_n,\ y_1,y_2,...,y_m)=0$,..., $f_m(x_1,x_2,...,x_n,\ y_1,y_2,...,y_m)=0$ în necunocutele $y_1,y_2,...,y_m$. In condiţiile teoremei, acest sistem se poate rezolva în vecinătatea unui punct care verifică ecuaţiile, în plus, soluţia este unică şi de clasă C^1.

Desigur că rezolvarea sistemului este "teoretică ", funcţia g neputându-se, în general, obţine efectiv. Totuşi derivatele parţiale ale soluţiei se pot obţine efectiv. Vom arăta aceasta în cazul particular n=2, m=1, cazul general fiind analog.

Exemplu. In condiţiile teoremei să presupunem că avem *f(x,y,g(x,y)*$\equiv$0 pe o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^2$ pe care avem şi $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \neq 0$. Derivând identitatea în raport cu x obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \equiv 0.$$

Deducem $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$=-$\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}$. Analog pentru $\frac{\partial g}{\partial y}$ etc.

Dacă o funcţie are derivate parţiale pe o mulţime deschisă , se pune problema dacă aceste derivate parţiale au, la rândul lor, derivate parţiale etc. Se ajunge astfel la **derivatele parţiale de ordin superior**. Ne vom limita, pentru uşurinţa scrierii, la cazul funcţiilor de două variabile. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A mulţime deschisă ; să presupunem că există $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pe A. Derivatele parţiale de ordinul 2 se definesc astfel: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$ (desigur dacă există , punctual sau global). Vom folosi şi notaţiile $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}$ pentru aceste derivate parţiale de ordinul 2. Derivatele f''_{xy}, f''_{yx} se numesc **derivate parţiale mixte**. In general derivatele parţiale mixte nu sunt egale, ordinea de derivare este importantă .

Teorema 5.6. ***(egalitatea derivatelor mixte)*** *Fie f o funcţie care are derivate parţiale mixte* f''_{xy}, f''_{yx} *într-o vecinătate a punctului (a,b)*$\in \mathbb{R}^2$ *continue în (a,b). Atunci*

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b).$$

Pentru funcţii de trei sau mai multe variabile notaţiile sunt similare celor de mai sus iar teorema asupra independenţei de ordinea de derivare se extinde cu uşurinţă . Vom spune că o funcţie, definită pe o mulţime deschisă este de clasă C^2 dacă toate derivatele parţiale până la ordinul 2 există şi sunt continue (pe mulţimea respectivă). Rezultă că pentru funcţii de clasă C^2, ordinea de derivare este neimportantă . Analog se definesc funcţiile de clasă C^k, k natural k=3; funcţiile continue se zic de clasă C^0 iar funcţiile de clasă C^k pentru orice k natural se zic de clasă C^∞. De exemplu, polinoamele sunt funcţii de clasă C^∞ pe întreg spaţiul.

Capitolul 6

Extremele funcţiilor, formule Taylor

Vom reaminti, pentru nceput, problematica extremelor funcţiilor de o variabilă .

Extrem local. Fie $f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, mulţime deschisă şi a∈A. Spunem că punctul a este un **minim local** (**maxim local**) pentru funcţia f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât *f(a)=f(x) (f(a)≥f(x))* pentru orice x∈V. Un punct de minim local sau de maxim local se numeşte punct de **extrem local** .

Teorema 6.1. ***(Fermat)*** *Fie a un punct de extrem local pentru funcţia f derivabilă în a. Atunci f′(a)=0.*

Demonstraţie. Să presupunem că a este un minim local. Atunci $f(x) - f(a) = 0$ într-un interval deschis centrat în a. Rezultă că $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ pentru $x<a$ şi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ pentru $x>a$. Trecând la limită obţinem rezultatul. □

Demonstraţia simplă de mai sus este importantaă pentru că arată rolul jucat de faptul că funcţia este definită pe o mulţime deschisă . Anularea derivatei este doar o condiţie necesară de extrem pentru funcţii derivabile. Astfel funcţia *f*, *f(x)*=x^3 are derivata nulă în a=0, dar 0 nu este un extrem local pentru *f*. Din teorema de mai sus rezultă că , pentru funcţii derivabile pe mulţimi deschise rezolvarea ecuaţiei *f′(x)*=0 oferă puncte ”candidate” la a fi extreme locale, dar pentru stabilirea celor care sunt extreme locale este nevoie de noi rezultate.

Pentru a obţine condiţii suficiente de extrem vom folosi formula Taylor (importantă şi în alte contexte).

Polinom Taylor. Fie f o funcţie cu valori reale şi a∈$\mathbb{R}$ astfel încât există derivata de ordin n=1, $f^{(n)}(a)$. Polinomul

$$P_n(a,x,f) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 +, ..., + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se numeşte **polinomul Taylor de ordin n al funcţiei f în a**. Polinomul Taylor de ordin n are aceeaşi valoare şi aceleaşi derivate până la ordinul n, cu f, în punctul a. In acest sens poate fi considerat o "aproximare" a funcţiei f în vecinătatea punctului a.
Diferenţa $R_n(a,x,f) = f(x) - P_n(a,x,f)$ este "restul" în această aproximare.

Propoziţia 6.1. *Fie f ca în definiţia de mai sus. Atunci* $\lim_{x\to a} \frac{R_n(a,x,f)}{(x-a)^n} = 0$.

Formula Taylor-Young. Fie f ca mai sus. Să definim funcţia ρ punând $\rho(x) = \frac{R_n(a,x,f)}{(x-a)^n}$ dacă $x \neq 0$ şi $\rho(x) = 0$ dacă $x = 0$. Atunci ρ este continuă în a şi:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + , ..., + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \rho(x)(x-a)^n$$

(**formula Taylor-Young**).

Formula Taylor-Lagrange. Fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I un interval deschis şi $a,x\in$I. Dacă f este de clasă C^{n+1} , n=0, atunci există un punct c între a şi x astfel încât:
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$(**formula Taylor-Lagrange**).
Remarcăm că , pentru n=0, regăsim formula de creşteri finite Lagrange.
Revenind la problema extremelor funcţiilor avem:

Propoziţia 6.2. *(**condiţie suficientă de extrem**). Fie funcţia f derivabilă de n ori, n=2, în punctul $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f'(a)$=0, $f''(a)$=0,..., $f^{(n-1)}(a)$=0, $f^{(n)}(a)\neq$0. Dacă n este număr par, atunci a este un punct de extrem local pentru f (pentru $f^{(n)}(a)>$0, minim local iar pentru $f^{(n)}(a)<$0 maxim local). Dacă n este impar, atunci a nu este punct de extrem local.*

Demonstraţie. Cu o evidentă modificare de notaţie formula Taylor-Young se scrie $f(x) = f(a) + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x-a)^n, \alpha(x) \underset{x\to a}{\to} 0, \alpha(a) = 0$.
Deducem $f(x) - f(a) =(f^n(a) + \alpha(x))\frac{(x-a)^n}{n!}$.

Dacă n este număr par $f^n(a)+\alpha(x)$ are semnul lui $f^n(a)$ într-o vecinătate a punctului a etc. □

Vom trece la studiul extremelor locale ale funcţiilor de mai multe variabile. Definiţia punctelor de extrem local este analoagă celei din cazul unei singure variabile.

Extrem local. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subseteq\mathbb{R}^n$, mulţime deschisă şi $a\in$A. Spunem că punctul a este un **minim local** (**maxim local**) pentru funcţia f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât *f(a)≤f(x) (f(a)≥f(x))* pentru orice $x\in$V. Un punct de minim local sau de maxim local se numeşte punct de **extrem local.**

Teorema 6.2. ***(Fermat)***. *Fie a un punct de extrem local pentru funcţia f diferenţiabilă în a. Atunci Df(a)=0 sau, echivalent,*

$$(*)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din definiţia derivatelor parţiale şi teorema lui Fermat pentru funcţii de o variabilă . □

Desigur, teorema de mai sus oferă doar condiţia necesară de extrem local pentru funcţii diferenţiabile definite pe mulţimi deschise. Un punct care verifică (*) nu este necesar un punct de extrem local.

Puncte critice. Un punct a se zice **punct critic** (pentru funcţia f) dacă *Df(a)*=0.

Punem astfel spune că punctele de extrem local ale unei funcţii diferenţiabile sunt puncte critice. Primul pas în "algoritmul" de determinare a punctelor de extrem ale unei funcţii diferenţiabile este rezolvarea sistemului:

$$(**)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$$

Presupunând acest sistem rezolvat este nevoie de un criteriu care să distingă punctele de extrem local. Pentru obţinerea unui asemenea criteriu este nevoie de unele pregătiri.

Formă pătratică . Dată o matrice simetrică $(a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ $a_{i,j}\in \mathbb{R}$, numim **formă pătratică** funcţia ω: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Forma pătratică este **pozitiv** (**negativ**) **definită** dacă $\omega(x) >0$ (<0) pentru orice $x \neq 0$. Forma pătratică este pozitiv (negativ) definită dacă şi numai dacă valorile proprii ale matricei $(a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ sunt strict pozitive (strict negative).

Hessiană . Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq\mathbb{R}^n$, mulţime deschisă , o funcţie de clasă C^2 şi $a\in$A. Matricea $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=1,...n}$ se numeşte **hessiana** funcţiei f în punctul a. Vom nota funcţia pătratică asociată cu D^2*f(a)*.

Teorema 6.3. ***(condiţie suficientă de extrem)***. *Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq\mathbb{R}^n$, mulţime deschisă , o funcţie de clasă C^2 şi $a\in A$ un punct critic pentru f.*

i) Dacă a este un minim local pentru f, atunci $D^2f(a)(x) \geq 0$ pentru orice x.

ii) Dacă forma pătratică $D^2f(a)$ este pozitiv definită a este minim local.

iii) Analog pentru maxim local înlocuind "$\geq$" cu "$\leq$" şi "pozitiv definită " cu "negativ definită ".

Demonstraţia acestei teoreme este similară celei pentru funcţiile de o variabilă şi se bazează pe o formulă Taylor. Vom arăta cum se obţine o formulă Taylor pentru funcţii de mai multe variabile din formula Taylor pentru funcţii de o variabilă limitându-ne la funcţii de clasă C^2.

Segment. Dacă a, x sunt în $\mathbb{R}^n$ se defineşte **segmentul** de extremităţi a şi x $[a,x]=\{a+t(x-a); t$ real $t\in[0,1]$ $\}$.
Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq\mathbb{R}^n$, mulţime deschisă , o funcţie de clasă C^2 şi a,$x\in$A astfel încât segmentul $[a,x] \subset$A.

Să considerăm funcţia $\phi(t) = f(a+t(x-a)), t \in [0,1]$. Aplicând funcţiei ϕ formula Taylor-Lagrange în 0 obţinem $\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} + \frac{\phi''(\xi)}{2!}, \xi$ între 0 şi1. Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse şi notând c=a+$\xi(x-a)$ avem.

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

care este un exemplu de formula Taylor-Lagrange pentru funcţii de mai multe variabile. Folosind acelaşi tip de raţionament se obţin formule Taylor implicând ordine superioare de derivare.
Pentru demonstrarea teoremei precedente formula obţinută este suficientă urmându-se liniile demonstraţiei de la cazul unei singure variabile.
Vom rescrie condiţiile de extrem pentru funcţii de două variabile şi vom prezenta un exemplu. Introducem notaţiile tradiţionale: $p = f'_x, q = f'_y, r = f''_{x^2}, s = f''_{xy}, t = f''_{y^2}$.
Din considerente elementare (semnul funcţiei de gradul 2) rezultă că forma pătratică $D^2 f(a,b)$ este definită (pozitiv sau negativ) dacă şi numai dacă în punctul (a,b) avem $rt - s^2 > 0$. In aceste condiţii, dacă (a,b) este un punct critic el este minim local dacă $r(a,b) > 0$(sau $s(a,b) > 0$) şi este maxim local dacă $r(a,b) < 0$(sau $s(a,b) < 0$). Dacă , în punctul critic (a,b), $rt - s^2 < 0$, atunci (a,b) nu este punct de extrem local. Cazul $rt - s^2 = 0$ nu este acoperit de rezultatele expuse.

Exemplu.

i) Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy(l-x-y), l > 0$. Problema este de a determina extremele locale ale acestei funcţii. Se observă că funcţia este de clasă C^2 pe mulţimea deschisă $\mathbb{R}^2$, deci vom putea aplica "algoritmul" descris mai sus. Avem $f'_x = y(l-2x-y), f'_y = x(l-x-2y)$ şi obţinem punctele critice $(0,0)$, $(l,0)$, $(0,l)$, $(\frac{l}{3}, \frac{l}{3})$. Vom testa doar punctul $(\frac{l}{3}, \frac{l}{3})$ pentru a vedea dacă este punct de extrem local. Avem $r = -2y$, $s = (l-2x-2y)$, $t = -2x$. Evaluând în $(\frac{l}{3}, \frac{l}{3})$ obţinem pentru $rt - s^2$ valoarea $\frac{l^2}{3} > 0$, deci punctul este de extrem local. Din $r(\frac{l}{3}, \frac{l}{3}) < 0$ deducem că avem un maxim local.

ii) Vom modifica funcţia din i) schimbând domeniul de definiţie. Fie deci $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy(l-x-y), l > 0$ unde T=$\{(x,y); x > 0, y > 0, x+y < l\}$. Punem aceeaşi problemă : a extremelor locale. Calculele de mai sus rămân valabile: singurul punct critic al funcţiei g este $(\frac{l}{3}, \frac{l}{3})$ şi este

un maxim local. In noua formulare problema pusă are o interpretare geometrică simplă $g(x,y)$ este volumul paralelipipedului (dreptunghic) de muchii x,y, $l-x-y$. Să observăm că suma muchiilor este l. Avem oare dreptul să afirmăm că dintre toate paralelipipedele cu suma muchiilor constantă cel mai mare volum îl are cubul? Din cele de mai sus maximul este doar local iar întrebarea noastră cere un răspuns global. Vom da acest răspuns considerând o nouă funcţie g_1 definită pe $T_1=\{(x,y); x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq l\}$ prin aceeaşi formulă (T este interiorul unui triunghi, iar la T_1 s-au adăugat şi laturile). Funcţia g_1 este continuă pe mulţimea compactă T_1 deci, conform teoremei lui Weiestrass (a se vedea Capitolul 2), este mărginită şi şi atinge marginile pe T_1. Din cauză că g_1 este nulă pe laturile triunghiului T_1 şi strict pozitivă în interior maximul este atins în interior şi astfel (în lipsa altui punct de extrem) nu poate fi decât $(\frac{l}{3}, \frac{l}{3})$. Se remarcă rolul compacităţii în trecerea de la "local" la "global".
Am studiat aplicaţiile calculului diferenţial la determinarea extremelor locale ale funcţiilor definite de mulţimi deschise (aşa numitele **extreme libere**).

Extrem condiţionat. Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $M \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime care nu este deschisă . Un punct $a \in$M este punct de **minim local** (**maxim local**) **pentru *f* condiţionat de M** dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât *f(a)≤f(x) (f(a)≥f(x))* pentru orice $x \in$V$\bigcap$M. Un punct de minim local (maxim local) pentru f condiţionat de M se zice punct de extrem local condiţionat de M.
In general, pentru funcţii diferenţiabile, un punct de extrem local condiţionat nu mai este punct critic. Pentru teorema următoare vom folosi notaţiile din teorema de funcţii implicite (a se vedea Capitolul 3).

Teorema 6.4. *(de multiplicatori Lagrange).Fie* $g : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g = (g_1, g_2, ...g_m)$ *o funcţie de clasă* C^1, *M=* $\{(x,y); g(x,y) = 0\}$ *şi (a,b)∈M un punct de extrem local condiţionat pentru funcţia de clasă* C^1, $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dacă funcţia g satisface condiţiile teoremei de funcţii implicite în (a,b), atunci există (şi sunt unice) numerele reale* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ***(multiplicatori Lagrange****) astfel încât punctul (a,b) este punct critic pentru funcţia*

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, ..., +\lambda_m g_m.$$

Teorema de mai sus stabileşte o condiţie necesară de extrem local condiţionat şi constituie primul pas în "algoritmul" de determinare a extremelor condiţionate pentru funcţii diferenţiabile (dacă mulţimea M este mulţimea pe care se anulează m funcţii $g_1, g_2, ..., g_m$). Ecuaţiile $g_1 = 0, g_2 = 0, ...,$ $g_m = 0$ se mai numesc **legături**.
Teorema se aplică în felul următor:

Se formează funcţia $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, ..., +\lambda_m g_m$ în care multiplicatorii sunt consideraţi necunoscuţi. Se rezolvă sistemul de $n+2m$ ecuaţii cu $n+2m$

necunoscute $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m, \lambda_1, ..., \lambda_m$:

$$F'_{x_i} = 0, F'_{y_j} = 0, g_1 = 0, g_2 = 0, ..., g_m = 0, i = 1, ...n, j = 1, ...m.$$

Dacă (λ, a, b) este o soluţie, atunci punctul (a,b) este un posibil punct de extrem local condiţionat.

Exemplu. Să se determine extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ cu legătura $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (extremele locale ale funcţiei f pe cercul unitate).

Observăm că teorema de funcţii implicite se poate aplica ecuaţiei $x^2 + y^2 - 1 = 0$, în raport cu x sau cu y în fiecare punct. Considerăm funcţia $F = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ şi rezolvăm sistemul $F'_x = 0, F'_y = 0, x^2 + y^2 = 1$, deci $1 + 2\lambda x = 0, 1 + 2\lambda y = 0, x^2 + y^2 = 1$. Din $x = -1/2\lambda$ şi $y = -1/2\lambda$ obţinem $2\lambda^2 = 1$, deci $\lambda_1 = \sqrt{2}/2, \lambda_2 = -\sqrt{2}/2$. Se obţin punctele $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, respectiv $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ care pot fi puncte de extrem local condiţionat. Dacă observăm că cercul unitate este o mulţime compactă şi folosim teorema lui Weierstrass: funcţia f este mărginită şi îşi atinge marginile pe cerc. Fiind neconstantă , deducem că primul punct obţinut este de minim (chiar global), iar cel de-al doilea de maxim (global). O reprezentare geometrică simplă arată că aceste puncte sunt chiar punctele de tangenţă ale cercului cu drepte paralele cu dreapta $x + y = 0$.

Capitolul 7

Serii numerice

Serie în $\mathbb{R}$. Fie $(u_n)_n$ un şir n $\mathbb{R}$. Considerăm şirul $(S_n)_n$ definit prin $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Se numeşte **serie în** $\mathbb{R}$ şi se notează $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ perechea de şiruri $(u_n)_n$, $(S_n)_n$. Termenii u_n se numesc **termenii seriei**, iar termenii S_n **sumele** sale **parţiale**.

Serie convergentă . Seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se zice **convergentă** dacă şirul $(S_n)_n$ este convergent. In acest caz, dacă $S_n \to S$, numărul real S se numeşte **suma seriei** şi se notează la fel ca seria însăşi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$(ambiguitatea dintre notaţia pentru serie şi notaţia pentru sumă se înlătură cu uşurinţă din context). O serie care nu este convergentă se zice **divergentă** .
Natura unei serii se referă la convergenţa ei. Modificarea unei mulţimi finite de termeni ai unei serii nu modifică natura acesteia. Astfel vom considera şi serii $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ luând, de exemplu, termenii până la ordinul k-1 egali cu 0.

Propoziţia 7.1. ***(condiţie necesară de convergenţă)*** *Dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *este convergentă , atunci* $u_n \to 0$.

Reciproca propoziţiei de mai sus nu este adevărată . De exemplu, dacă luăm $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, atunci $u_n \to 0$, dar seria $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ este divergentă (căci $S_n = \sqrt{n+1}, S_n \to \infty$).
Vom nota seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ şi $u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$

Exemplu. Pentru $x \in \mathbb{R}$, considerăm seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (numită **serie geo-**

metrică de raţie x). Se arată cu uşurinţă că această serie converge dacă şi numai dacă $|x|<1$. In acest caz suma seriei este $\frac{1}{1-x}$.

Spaţiul vectorial al seriilor convergente. i) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sunt serii convergente, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+v_n)$ este convergentă şi

$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n+\sum_{n=0}^{\infty}v_n$.

ii) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este o serie convergentă şi $\alpha\in\mathbb{R}$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha u_n$ este convergentă şi $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha u_n=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}u_n$.

Criteriul lui Cauchy. Seria $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_\varepsilon$ astfel încât pentru $n\geq N_\varepsilon$ şi $\forall$ p, $|u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+p}|<\varepsilon$. Acest criteriu rezultă din criteriul lui Cauchy pentru şiruri aplicat şirului $(S_n)_n$.
Un şir $(a_n)_n$ este **şir Cauchy** dacă $\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon$ astfel încât pentru $n\geq N_\varepsilon$ şi orice p rezultă $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. **Criteriul lui Cauchy pentru şiruri în** $\mathbb{R}$ afirmă că un şir în $\mathbb{R}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.

Seria armonică . Seria $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ se numeşte serie armonică . Seria armonică este divergentă . In adevăr avem $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$ şi criteriul lui Cauchy nu este satisfăcut.

Serii cu termeni pozitivi. O serie $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este cu **termeni pozitivi** dacă $u_n\geq 0$ pentru orice n. Pentru o serie cu termeni pozitivi convergenţa este echivalentă cu mărginirea (superioară) a şirului de sume parţiale (acesta este crescător).

Pentru seriile cu termeni pozitivi avem criteii de comparaţie, dintre care vom prezenta pe cele mai simple. Trebuie atenţie în a nu aplica criterii de comparaţie seriilor care nu satisfac această condiţie.

Criteriul de comparaţie I. Fie $\sum_{n=0}^{\infty}u_n, \sum_{n=0}^{\infty}v_n$ serii cu termeni pozitivi astfel încât $u_n\leq v_n$ pentru orice n. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ este convergentă , atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este convergentă . Dacă $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este divergentă , atunci $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ este divergentă .

Criteriul de comparaţie II. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=0_n}^{\infty}$ serii cu termeni pozitivi, $v_n > 0$ pentru orice n. Să presupunem că există şi este finită limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

i) Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ este convergentă , atunci şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergentă .

ii) Dacă $L \neq 0$ seriile au aceeaşi natură .

Exemplu. Fie seria $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$ Dacă luăm $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ deducem imediat, din criteriul comparaţiei, convergenţa primei serii.
Din comparare cu seria geometrică , se obţin următoarele două criterii. Le enunţăm doar în forma II.

Criteriul rădăcinii. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât există limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Atunci:

i) Dacă $L < 1$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergentă .

ii) Dacă $L > 1$, seria este divergentă .

iii) Dacă $L = 1$ nu se poate conchide (a se vedea seriile cu $u_n = \frac{1}{n}, v_n = \frac{1}{n^2}$).

Criteriul raportului. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ o serie cu $u_n > 0$ pentru orice n şi astfel încât există $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Atunci:

i) Dacă $L < 1$, seria este convergentă .

ii) Dacă $L > 1$, seria este divergentă .

iii) Dacă L =1 nu se poate conchide.

Exemplu. Fie seria $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$ Folosind criteriul raportului se deduce imediat convergenţa acestei serii. Se poate arăta că suma acestei serii este numărul $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Mai general, folosind acelaşi criteriu se arată că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|x|^n}{n!}$ este convergentă .

Criteriul integral. Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie pozitivă şi descrescătoare. In aceste condiţii seria $\sum\limits_{1}^{\infty} f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(\int_1^n f)_n$ este convergent (am notat, pentru simplitate, $\int_1^n f$ integrala Riemann $\int_1^n f(x)dx$).

Exemplu. Fie seria $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + ...$(numită **serie Riemann** de exponent α). Aplicând (şi) criteriul integral se deduce că seria Riemann de exponent α este **convergentă** dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.
Revenim la seriile cu termeni oarecari (nu neapărat pozitivi).

Criteriul lui Abel. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cu şirul sumelor parţiale mărginit şi $(\alpha_n)_n$ un şir descrescător cu limita 0. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$ este convergentă .

Exemplu (serie Leibniz). Dacă $(\alpha_n)_n$ este un şir descrescător cu limita 0 numim serie Leibniz seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$. Din criteriul de mai sus rezultă că **seriile Leibniz sunt convergente**. In particular, este convergentă **seria armonică alternată** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + ...$

Calcul aproximativ (al sumei unei serii convergente). Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este o serie convergentă de sumă S, atunci $R_n = S - S_n$ este restul seriei. Evident, şirul $(R_n)_n$ tinde la 0 când $n \to \infty$. Problema calculului aproximativ al sumei S este înlocuirea sa cu o sumă parţială S_n şi estimarea erorii $|R_n|$ care se produce în acest caz. Pentru seriile Leibniz estimarea erorii este deosebit de comodă . Astfel avem, **pentru o serie Leibniz**, $|R_n| < \alpha_{n+1}$ (a se vedea notaţia din exemplul precedent). Mai mult, la seria Leibniz, subşirul $(S_{2n})_n$ este descrescător, iar subşirul $(S_{2n+1})_n$ este crescător, astfel că putem afirma că sumele parţiale de ordin par aproximează suma seriei prin adaos în timp ce sumele parţiale de ordin impar aproximează suma seriei prin lipsă .

Absolut convergenţă . O serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este **absolut convergentă** dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ este convergentă . Orice serie absolut convergentă este convergentă (consecintză imediată a criteriului lui Cauchy). Seria armonică alternată este convergentă dar nu este absolut convergentă .
Importanţa seriilor absolut convergente rezultă (şi) din:

Teorema 7.1. *i) Intr-o serie absolut convergentă de suma S orice schimbare a ordinii termenilor transformă seria într-o serie absolut convergentă de sumă S .*

ii) Dată o serie convergentă dar nu absolut convergentă şi un numşr real A se poate schimba ordinea termenilor astfel încât să se obţină o serie de sumă A.

Prin termenul oarecum imprecis "schimbarea ordinii" înţelegem înlocuirea termenului u_n cu $u_{\sigma(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o bijecţie.

Teorema 7.2. *(**înmulţirea seriilor**). Fie seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \sum_{n=0}^{\infty} v_n$*; definim*

seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *al celor dou serii prin* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *pentru orice* n*. Dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *este absolut convergentă cu suma* S *şi seria* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *este convergentă cu suma* T*, atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *este convergentă cu suma* ST*.*

Observaţia 7.1. Definiţia seriei, a convergenţei, condiţia necesară de convergenţă, criteriul lui Cauchy se extind cu uşurinţă pentru **serii în** $\mathbb{C}$ (cu coeficienţi numere complexe). Totul se bazează pe noţiunea de şir convergent de numere complexe; definiţia limitei pentru **şiruri în** $\mathbb{C}$ este perfect analoagă celei din $\mathbb{R}$ înlocuind modulul din $\mathbb{R}$ cu modulul în $\mathbb{C}$. Am preferat limitarea la cazul $\mathbb{R}$ pentru o mai bună fixare a ideilor.

Capitolul 8

Integrale improprii

Vom presupune (am şi fiacut-o la criteriul integral) noţiunea de integrabilitate (Riemann) a funcţiilor pe intervale compacte cunoscută . Scopul acestui capitol este de a extinde integrala la cazul funcţiilor definite pe intervale necompacte. Teoria prezintă analogii importante cu teoria seriilor ceea ce justifică prezentarea ei după secţiunea dedicată acestora. Pentru comoditatea cititorului vom enunţa principalele proprietăţi ale integralei. Aceste proprietăţi vor fi utilizate, în repetate rânduri.

Proprietăţile funcţiilor integrabile. Fie $f, g : [a, b] \to\mathbb{R}$, funcţii mărginite,
i) Dacă *f*, g sunt integrabile, atunci funcţia $f + g$ este integrabilă şi

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

ii) Dacă f este integrabilă şi $\alpha\in \mathbb{R}$, atunci funcţia αf este integrabilă şi

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

iii) Dacă *f*, g sunt integrabile şi $f \leq g$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
iv) Dacă f este integrabilă , atunci $|f|$ este integrabilă şi

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

v) Dacă $c \in [a, b]$, atunci *f* este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă f este integrabilă pe $[a, c]$ şi pe $[c, b]$. In acest caz avem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

vi) Dacă funcţia *f* este continuă pe $[a, b]$, atunci funcţia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este derivabilă şi $F' = f$.

vii) Dacă F este o primitivă a funcţiei continue *f*, atunci $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Clase de funcţii integrabile.

i) Orice **funcţie continuă** este integrabilă .

ii) Orice **funcţie monotonă** este integrabilă .

Aşa cum am făcut şi în capitolul anterior, vom nota $\int_a^b f$ în loc de $\int_a^b f(x)dx$ de câte ori nu este pericol de confuzie.

Funcţie local integrabilă . O funcţie este **local integrabilă** pe un interval I dacă este integrabilă pe orice interval compact conţinut în I.

Exemplu. Funcţiile continue şi funcţiile monotone sunt local integrabile.

In restul acestui capitol vom nota variabila atât cu t cât şi cu x.

Integrala improprie I. Dacă funcţia f este local integrabilă pe $[a,\infty)$, $a \in\mathbb{R}$ se poate defini funcţia $F : [a,\infty) \to\mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Perechea de funcţii f, F se numeşte **integrala improprie** a funcţiei f şi se notează $\int_a^\infty f(t)dt$ sau, mai simplu, $\int_a^\infty f$. Integrala improprie $\int_a^\infty f$ se zice **convergentă** dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

In acest caz **valoarea integralei improprii** $\int_a^\infty f$ se notează , de asemenea, $\int_a^\infty f$ şi este $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. O integrală improprie care nu este convergentă se zice **divergentă** .

Natura unei integrale improprii se referă la convergenţa acesteia. Dacă $b \in [a,\infty)$, atunci $\int_a^\infty f$ este convergentă dacă şi numai dacă $\int_b^\infty f$ este convergentă .

Exemplu.

i) Fie $f : [0,\infty) \to\mathbb{R}$, $f(t) = e^{-t}$; rezultă $F(x) = 1-e^{-x}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$. Deci $\int_0^\infty e^{-t}dt$ este convergentă şi $\int_0^\infty e^{-t}dt = 1$.

ii) Fie $g; [0,\infty) \to\mathbb{R}$, $g(t) = \cos t$; rezultă $G(x) = \sin x$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)$ nu există , deci $\int_0^\infty \cos t dt$ este divergentă .

iii) Fie $f : [1,\infty) \to\mathbb{R}$, $f(t) = 1/t^\alpha$, $\alpha \in\mathbb{R}$. Se arată cu uşurinţă că $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

Remarcă . In analogia serii, integrale improprii, care a fost desigur observată , criteriul necesar de convergenţă în forma "dac $\int_a^\infty f$ este convergentă , atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(t) = 0$" nu are loc. In adevăr, se poate considera exemplul unei funcţii f definită pe intervalul $[0,\infty)$ astfel încât $f(n) = n$ pentru orice natural n, al cărei grafic pe fiecare interval $\left[n - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2n^3}\right]$, $n \geq 1$ este format de laturile triunghiului isoscel de înălţime n şi care este nulă în rest.

$\int_a^\infty f$ este convergentă (de reamintit interpretarea integralei ca arie), dar nu tinde la 0 când t tinde la infinit.

Spaţiul vectorial al funcţiilor cu integrala convergentă . Dacă f, g sunt local integrabile pe $[a,\infty)$, atunci:

i) Dacă $\int_a^\infty f$, $\int_a^\infty g$ sunt convergente, atunci $\int_a^\infty (f+g)$ este convergentă şi avem: $\int_a^\infty (f+g)=\int_a^\infty f+\int_a^\infty g$.

ii) Dacă $\int_a^\infty f$ este convergentă şi $\alpha \in\mathbb{R}$, atunci $\int_a^\infty \alpha f$ este convergentă şi rezultă $\int_a^\infty \alpha f = \alpha \int_a^\infty f$.

Criteriul lui Cauchy. $\int_a^\infty f$ este convergentă dacă şi numai dacă :

$\forall \varepsilon > 0, \exists B_\varepsilon, a < B_\varepsilon$ astfel încât $\forall x', x'' > B_\varepsilon$ să avem $\left|\int_{x'}^{x''} f\right| < \varepsilon$.

Remarcă . Dacă funcţia f , local integrabilă este pozitivă , atunci pentru convergenţa integralei $\int_a^\infty f$ este suficientă mărginirea funcţiei F. Se pot obţine astfel criterii de comparaţie.

Criteriul de comparaţie I. Fie $0 \le f \le g$ local integrabile pe $[a, \infty)$. Dacă $\int_a^\infty g$ este convergentă , atunci şi $\int_a^\infty f$ este comvergentă . Dacă $\int_a^\infty f$ este divergentă , atunci şi $\int_a^\infty g$ este divergentă .

Exemplu. $\int_1^\infty e^{-t^2} dt$ este convergentă căci $e^{-t^2} \le e^{-t}$ pentru $t \in [1, \infty)$ etc.

Criteriul de comparaţie II. Dacă f, g sunt local integrabile pe $[a, \infty)$ $f \ge 0, g > 0$ şi există limita finită $L = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)}$ atunci:

i) Dacă $\int_a^\infty g$ este convergentă , atunci şi $\int_a^\infty f$ este convergentă .

ii) Dacă $L \ne 0$ integralele $\int_a^\infty f$, $\int_a^\infty g$ au aceeaşi natură .

Putem reformula şi:

Criteriul integral. Fie $f : [1, \infty) \to\mathbb{R}$ o funcţie pozitivă şi descrescătoare. In aceste condiţii seria $\sum\limits_1^\infty f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă $\int_1^\infty f$ este convergentă .

Observaţie. Cu modificări evidente se definesc integralele improprii pe intervale $(-\infty, a]$ şi convergenţa acestora. Fie acum $f : (-\infty, \infty) \to\mathbb{R}$ local integrabilă . Spunem că $\int_{-\infty}^\infty f$ este convergentă dacă există c astfel încât integralele $\int_{-\infty}^c f, \int_c^\infty f$ să fie convergente. In acest caz definim $\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$. Definiţia este corectă , atât convergenţa cât şi valoarea integralei fiind independente de punctul c.

Integrala improprie II. Vom considera funcţii local integrabile pe $(a, b]$, $a, b \in\mathbb{R}$, $a < b$. $\int_a^b f$ se zice convergentă dacă funcţia $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ are limită finită pentru $x \to a$ şi valoarea integralei improprii este această limită . Am considerat util de separat cazul intervalului mărginit de cazul intervalului nemărginit pentru că , pentru funcţii mărginite pe $(a, b]$, integrala improprie nu aduce ceva nou: dacă f este local integrabilă şi mărginită atunci dându-i o valoare oarecare în punctul a se obţine o funcţie integrabilă pe $[a, b]$ a cărei integrală este independentă de valoarea dată şi egală cu valoarea integralei improprii convergente $\int_a^b f$.

Exemplu. Fie $f : (0, 1] \to\mathbb{R}$, $f(t) = t^\alpha, \alpha \in\mathbb{R}$. Se arată uşor că $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge dacă şi numai dacă $t < 1$.

Nu vom mai descrie toate tipurile de integrale improprii corespunzătoare diferitelor tipuri de intervale necompacte. Cititorul le poate defini cu uşurinţă folosind cazurile tratate mai sus. De asemenea nu vom mai enunţa criterii de tip Cauchy sau criterii de comparaţie etc. Acestea sunt adaptări ale rezultatelor corepunzătoare de mai sus.

Absolut convergenţă . Integrala improprie a unei funcţii local integrabile f este **absolut convergentă** dacă este convergentă integrala funcţiei $|f|$. O integrală absolut convergentă este convergentă . Reciproca nu este adevărată : astfel $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ este convergentă dar nu este absolut convergentă

Capitolul 9

Şiruri şi serii de funcţii. Serii de puteri

Vom considera şiruri $(f_n)_n$ de funcţii $f_n : I \to\mathbb{R}$, unde I este un interval în $\mathbb{R}$.

Convergenţă simplă . Şirul $(f_n)_n$ **converge simplu** (**punctual**) către funcţia $f : I \to\mathbb{R}$ dacă , pentru orice $x \in I$ şirul $(f_n(x))_n$ converge la $f(x)$. In acest caz scriem $f_n \overset{s}{\to} f$. Dezvoltat:

(*) $\forall x \in I, \forall\varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon}$ astfel încât dacă $n > N_{x,\varepsilon}$ atunci $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Exemplu. Fie $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$ şi $f : [0, 1] \to\mathbb{R}$, $f(x) = 0, x < 1, f(1) = 1$. Atunci $f_n \overset{s}{\to} f$(rezultă că un şir de funcţii continue poate converge simplu către o funcţie care nu este continuă).

Convergenţă uniformă . Şirul $(f_n)_n$ **converge uniform** către funcţia $f : I \to\mathbb{R}$ (şi scriem $f_n \overset{u}{\to} f$) dacă :

(**) $\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ astfel încât dacă $n > N_\varepsilon$ atunci $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in I$.

Se observă că dacă
$f_n \overset{u}{\to} f$ atunci $f_n \overset{s}{\to} f$. Reciproca nu este adevărată .

Exemplu. Reluând exemplul precedent, se arată că şirul f_n nu converge uniform către f .

Propoziţia 9.1. *Dacă $(f_n)_n$ este un şir de funcţii pe I şi $f : I \to \mathbb{R}$ notăm $m_n = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|, m_n \in [0, \infty]$. Atunci $f_n \overset{u}{\to} f$ dacă şi numai dacă $m_n \to 0$.*

Corolarul 9.1. *Dacă există un şir $(x_n)_n$ în I astfel încât şirul $(f_n(x))_n$ nu tinde la 0 atunci şirul $(f_n)_n$ nu tinde uniform către funcţia identic nulă 0.*

Teorema 9.1. ***(transfer de continuitate)**. Să presupunem că $f_n \overset{u}{\to} f$ şi că toate funcţiile f_n sunt continue în punctul $a \in I$. Atunci funcţia f este* *continuă în a. Rezultă că dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ şi funcţiile f_n sunt continue pe I, atunci f este continuă pe I.*

Teorema 9.2. ***(integrare termen cu termen)***. *Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii continue, $f_n \xrightarrow{u} f$ pe un interval compact $[a, b]$. Atunci $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ (integrala limitei este limita integralelor).*

Teorema 9.3. ***(derivare termen cu termen)***. *Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii derivabile pe intervalul I astfel încât $f_n \xrightarrow{s} f$ şi $f_n' \xrightarrow{u} g$. Atunci funcţia f este derivabilă şi $f' = g$.*

Serie de funcţii. Dacă $(f_n)_n$ este un şir de funcţii pe I considerăm şirul de funcţii $(S_n)_n$, unde $S_n = f_0 + f_1 + ... + f_n$. Seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este perechea de şiruri $(f_n)_n$, $(S_n)_n$. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$**converge simplu** (**uniform**) dacă şirul $(S_n)_n$ converge simplu (uniform). In acest caz limita simplă (uniformă) a şirului $(S_n)_n$ este suma seriei.

Criteriu (**Weierstrass**). Dacă există o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ astfel încât $|f_n(x)| \leq a_n, \forall x$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniform.

Remarcă . Teoremele de transfer de continuitate, integrare termen cu termen, derivare termen cu termen se extind imediat la serii de funcţii. De exemplu, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este o serie uniform convergentă de funcţii continue pe intervalul $[a, b]$, atunci $\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_a^b f_n)$ etc.

Serie de puteri. Se numeşte **serie de puteri** (în $\mathbb{R}$) o serie de funcţii de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_n \in \mathbb{R}$. Numerele reale a_n se numesc **coeficienţii seriei**.

Rază de convergenţă . Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Există (şi este unic) $R \in [0, \infty]$, numit **raza de convergenţă** a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, astfel încât

i) Dacă $|x| < R$, atunci seria de numere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolut. In particular, seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge simplu pe $(-R, R)$. In cazul $R = 0$ singurul punct de convergenţă al seriei este $x = 0$.

ii) Dacă $0 < r < R$ atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniform pe $[-r, r]$.
In particular, dacă $R = \infty$, atunci seria converge uniform pe orice interval compact.
iii) Dacă există limita $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci rezultă :
$R = \frac{1}{l}$ (cu convenţia $\frac{1}{0}$=∞, $\frac{1}{\infty} = 0$).
iv) Dacă există limita $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, atunci avem R=l .

Exemplu. Seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ are raza de convergenţă R=1. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ are raza de convergenţă R=∞.

Teorema 9.4. *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *cu rază de convergenţă* $R > 0$ *şi fie f suma seriei pe intervalul de convergenţă* $(-R, R)$. *Atunci:*

i) Funcţia f este de clasă C^∞ *şi derivatele sale se obţin prin derivare termen cu termen. De exemplu,* $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ *etc. (seriile derivatelor au aceeaşi rază de convergenţă ca seria iniţială).*

ii) Funcţia f se poate integra termen cu termen pe orice interval compact $[a, b] \subset (-R, R)$. *Astfel* $\int_a^b f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$.

iii) Dacă F este o primitivă a funcţiei f, atunci $F(x) = F(0) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Dezvoltare în serie de puteri. Dacă o funcţie f este suma unei serii de puteri (pe intervalul de convergenţă al acesteia) spunem că f este **dezvoltabilă în serie de puteri** (pe intervalul respectiv). Dacă $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-R, R)$, atunci $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}, n \in$. In particular, seria de puteri cu sumă f este unic determinată de f.

Exemplu. Folosind teorema de mai sus, deducem, pornind de la seria geometric, $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ pentru $|x| < 1$.

Remarcă . Seriile de puteri sunt utile în **definirea unor funcţii** foarte importante. Astfel, putem lua prin definiţie:

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \text{ pentru } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...x \in \mathbb{R}.$$

Este de preferat a se lucra cu **serii de puteri în** $\mathbb{C}$ definind exponenţiala complexă prin aceeaşi formulă ca cea reală şi, apoi, funcţiile trigonometrice pe baza "relaţiei lui Euler" : $e^{ix} = \cos x + i \sin x, x \in \mathbb{R}$. In acest mod toate formulele trigonometrice se deduc din relaţia lui Euler folosind proprietatea fundamentală a exponenţialei: $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

Teorema 9.5. *(**Abel**). Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie convergentă de numere reale. Dacă notăm f suma seriei de puteri* ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *în intervalul* $(-1, 1)$, *atunci* $\lim_{x \to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Exemplu. Am obţinut, mai sus, dezvoltarea $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$. In acest caz seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ din teorema precedentă este seria armonică alternată . Deducem că suma seriei armonice alternate este $\ln 2$.

Se consideră , mai general, serii de puteri de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ numite **serii Taylor** (centrate în a). Teoria acestor serii se este analoagă teoriei discutate mai sus.

Funcţie analitică O funcţie definită pe o mulţime deschisă A din $\mathbb{R}$ se zice (real) analitică dacă , în vecinătatea fiecărui punct $a \in A$, este suma unei serii Taylor centrate în a.

Capitolul 10

Serii Fourier

Definiţia 10.1. Fie H un spaţiu vectorial (complex sau real); o aplicaţie

$$<,>: H \times H \mapsto \mathbb{C} \text{ (respectiv } \mathbb{R})$$

se numeşte **produs scalar** dacă pentru orice $x, y, z \in H$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sunt adevărate relaţiile:
i. $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > + \beta < y, z >$;
ii. $< x, y >= \overline{< y, x >}$;
iii. $< x, x > \geq 0$;
iv. $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Perechea $(H, <,>)$ se numeşte **spaţiu cu produs scalar**.

Aplicaţia $\| \ \| : H \mapsto H$, $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$ este **normă** pe H şi verifică inegalitatea lui Schwarz:

$$| < x, y > | \leq \| x \| \| y \|, \forall x, y \in H.$$

Reciproc, un spaţiu normat $(H, \| \ \|)$ este spaţiu cu produs scalar dacă şi numai dacă este verificată legea paralelogramului:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right), \forall x, y \in H.$$

Spaţiul $(H, <,>)$ se numeşte **spaţiu Hilbert** dacă orice şir Cauchy este convergent (spaţiul normat $(H, \| \ \|)$ este complet).
In cele ce urmează $(H, <,>)$ este un spaţiu Hilbert.

Exemplul 10.1. Spaţiul Banach $\mathbb{C}^n$ (cu norma euclidiană) este spaţiu Hilbert cu produsul scalar:

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j},$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vectori din $\mathbb{C}^n$. Analog şi pentru R^n.

Exemplul 10.2. Spaţiul Banach al şirurilor de pătrat sumabil,

$$\ell^2(N) = \{x : N \mapsto \mathbb{C} \mid \sum_{n\in N} |x(n)|^2 < \infty\}$$

este spaţiu Hilbert cu produsul scalar:

$$< x, y >= \sum_{n\in N} x(n)\overline{y(n)},$$

pentru orice şiruri $x, y \in \ell^2(N)$. Analog şi pentru spaţiul şirurilor bilaterale (definite pe Z), $\ell^2(Z)$.

Definiţia 10.2. Doi vectori $x, y \in H$ se numesc **ortogonali** (sau **perpendiculari**; notăm $x \perp y$) dacă $< x, y >= 0$. Ortogonalul unei mulţimi nevide $M \subseteq H$ este, prin definiţie, mulţimea (subspaţiul închis)

$$M^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp y, \forall y \in M\}.$$

Teorema 10.1. ***(Teorema proiecţiei)*** *Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $M \subseteq H$ o mulţime nevidă , închisă şi convexă . Atunci există un unic vector $x_M \in M$ astfel încât*

$$\| x_M \|= \inf\{\| x \| \ \mid x \in M\}.$$

O consecinţă importantă este generalizarea descompunerii după direcţii perpendiculare din geometria euclidiană :

Teorema 10.2. ***(Descompunerea ortogonală)*** *Fie $K \subseteq$ un subspaţiu închis şi fie $K^{\perp}$ ortogonalul său. Atunci, pentru vector $x \in H$ există (şi sunt unici) $y \in K$ şi $z \in K^{\perp}$ astfel încât $x = y + z$.*

Definiţia 10.3. Fie H un spaţiu Hilbert; o submulţime $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i\in J}$ se numeşte **bază ortonormală** în H dacă :
i. $< \varepsilon_i, \varepsilon_j >= \delta_{ij}$ (simbolul lui Kronecker), $\forall i, j \in J$;
ii. subspaţiul vectorial generat de $\mathcal{B}$ este dens în H.

Definiţia 10.4. Spaţiul Hilbert H se numeşte **separabil** dacă admite baze ortonormale cel mult numărabile.

In continuare vom considera numai spaţii Hilbert separabile.

Definiţia 10.5. Fie H un spaţiu Hilbert (separabil), fie $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n\in N}$ o bază ortonormală (fixată) şi fie $x \in H$ un vector fixat; coeficienţii Fourier ai lui x (în baza $\mathcal{B}$) sunt $\widehat{x}_n =< x, \varepsilon_n >, \forall n \in N$, iar seria $\sum_{n\in N} \widehat{x}_n \varepsilon_n$ se numeşte **seria Fourier** asociată lui x. Aplicaţia

$$H \ni x \mapsto (\widehat{x}_n)_n \in \ell^2(N)$$

se numeşte **transformarea Fourier** (pe spaţiul H).

Proprietăţile seriei Fourier

i. Pentru orice $x \in H$, seria Fourier asociată , $\sum_{n\in N} \widehat{x}_n \varepsilon_n$, converge la x;

ii. $\| x \|^2 = \sum_{n \in N} |\widehat{x}_n|^2$ (**identitatea lui Parseval**);
iii. transformarea Fourier este un izomorfism (izometric) de spaţii Hilbert.

Serii trigonometrice

Un caz particular remarcabil de serie Fourier este seria trigonometrică . Considerăm spaţiul Hilbert al funcţiilor periodice (de perioadă 2π) de pătrat integrabil:

$$L^2[0,2\pi] = \{f : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{C} \mid f \text{ măsurabilă şi } \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Produsul scalar este

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt,$$

iar norma $\| f \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$.
Pentru orice $n \in Z$, fie $\omega_n(t) = e^{int}$. Un rezultat clasic de analiză afirmă că mulţimea (sistemul trigonometric) $\mathcal{B} = \{\omega_n \mid n \in Z\}$ este bază ortonormală în $L^2[0,2\pi]$. Pentru orice funcţie $f \in L^2[0,2\pi]$, coeficienţii Fourier (în raport cu baza fixată mai sus), sunt

$$\widehat{f_n} =< f, \omega_n >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \forall n \in Z,$$

iar seria Fourier (sau seria trigonometrică) asociată funcţiei f este $\sum_{n \in Z} \widehat{f}_n \omega_n$; sumele parţiale ale seriei, $P_n = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k \omega_k$, se numesc **polinoame trigonometrice** şi $\lim_{n \to \infty} P_n = f$ în spaţiul $L^2[0,2\pi]$, sau, echivalent:

$$\lim_{n \to \infty} \| P_n - f \|_2 = 0.$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \| f \|_2^2 = \sum_{n \in Z} |\widehat{f}_n|^2.$$

Folosind egalitatea $e^{int} = \cos nt + i \sin nt, \forall t \in R$, seria Fourier asociată funcţiei f se poate scrie sub forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

unde coeficienţii trigonometrici (clasici) a_n şi b_n sunt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt, \; \forall \, n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt,\ \forall\, n \geq 1.$$

Legătura dintre coeficienţii $\widehat{f}_n, a_n$ şi b_n este:

$$\widehat{f}_0 = \frac{a_0}{2},\ \widehat{f}_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ \widehat{f}_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ \forall\, n = 1, 2, ...$$

Lema lui Riemann afirmă că dacă funcţia f este integrabilă , atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

In legătură cu convergenţa punctuală a seriei Fourier, are loc următorul rezultat clasic:

Teorema 10.3. ***(Teorema lui Dirichlet)*** *Dacă $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ este o funcţie periodică de perioadă 2π, măsurabilă , mărginită , având cel mult un număr finit de discontinuităţi de speţa intâi şi având derivate laterale în orice punct, atunci seria Fourier asociată funcţiei f converge în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$ la*

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

In particular, dacă funcţia f este continuă (şi verifică celelalte ipoteze din teorema lui Dirichlet), atunci are loc descompunerea:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Condiţii suficiente pentru convergenţa uniformă a seriei Fourier sunt date în teorema următoare:

Teorema 10.4. ***(Convergenţa uniformă a seriei Fourier)*** *Dacă $f : R \mapsto \mathbb{C}$ este o funcţie continuă , de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni şi periodică de perioadă 2π, atunci seria sa Fourier este absolut şi uniform convergentă , iar suma este f.*

Numărul $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$ este media semnalului f, primul termen

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

este oscilaţia principală (în jurul valorii medii), iar termenul

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt,\ n \geq 2$$

este armonica de ordinul n a funcţiei f. Perioada armonicei de ordinul n este $\frac{2\pi}{n}$, iar amplitudinea $A_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$; conform lemei lui Riemann rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$.

In cazul în care funcţia f are perioada $T = 2\ell$, $(\ell > 0)$, atunci toate rezultatele de mai sus sunt în continuare adevărate, cu adaptările corespunzătoare; baza ortonormală este

$$\{\epsilon_n \mid n \in Z\}, \text{ cu } \epsilon_n(x) = e^{i\frac{n\pi x}{\ell}},$$

iar coeficienţii Fourier sunt:

$$\widehat{f_n} = \frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}dx, \forall\, n \in Z,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \forall\, n = 0, 1, 2, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \forall\, n = 1, 2, ...$$

Teorema lui Dirichlet se scrie:

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f_n}e^{i\frac{n\pi x}{\ell}}, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}|f(t)|^2\,dt.$$

Evident, toate rezultatele de mai sus rămân adevărate dacă înlocuim intervalul $[0, 2\ell]$ cu orice alt interval de lungime 2ℓ, de exemplu, $[-\ell, \ell]$.

Serii de sinusuri şi cosinusuri

Fie $f : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă şi fie $\tilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, periodică de perioadă 2ℓ, definită prin:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [0, \ell] \\ f(-x) & , \quad x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

Dacă funcţia $\tilde{f}$ satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci, dezvoltând $\tilde{f}$ în serie Fourier, rezultă :

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{\ell}, \forall\, x \in (0, \ell),$$

$$f(0+0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \; f(\ell - 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

coeficienţii a_n fiind coeficienţii Fourier reali asociaţi funcţiei $\tilde{f}$.
Formula de mai sus se numeşte dezvoltarea în serie de cosinusuri a lui f.
Analog, dacă funcţia (impară):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [0, \ell] \\ -f(-x) & , \quad x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci dezvoltarea în serie de sinusuri a funcţiei f este:

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \ \forall x \in (0, \ell),$$

coeficienţii b_n fiind coeficienţii Fourier reali asociaţi funcţiei $\tilde{f}$.

Capitolul 11

Funcţii definite prin integrale

Funcţie definită printr-o integrală proprie. Fie $f : [a,b]\times(c,d) \to\mathbb{R}$. Să presupunem că pentru orice $y \in (c,d)$ funcţia $x \mapsto f(x,y)$ este integrabilă pe $[a,b]$. Este deci bine definită , printr-o integrală , funcţia $(*)$ $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Continuitate. Dacă funcţia f este continuă , atunci funcţia F este continuă .

Derivabilitate. Dacă f este continuă şi există $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi este continuă , atunci funcţia F este derivabilă şi $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$. Ultima formulă poartă numele de **regula lui Leibniz**.

Funcţie definită printr-o integrală improprie. Fie $f : [a,b) \times (c,d) \to\mathbb{R}$ (b real sau ∞). Să presupunem că pentru orice $y \in (c,d)$ funcţia $x \mapsto f(x,y)$ este local integrabilă pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x,y)dx$ este convegentă . Este bine definită , printr-o integrală improprie, funcţia $(**)F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Se dau definiţii analoage pentru celelalte tipuri de intervale necompacte.

Convergenţa uniformă . In condiţiile definiţiei de mai sus spunem că integrala $(**)$ **converge uniform în raport cu *y*** dacă : $\forall\varepsilon > 0, \exists B_\varepsilon < b$ astfel încât $B_\varepsilon < u < b$ să implice $\left|\int_u^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon, \forall y \in (c,d)$.

Continuitate. Cu notaţiile de mai sus dacă f este continuă şi integrala $(**)$ converge uniform, atunci funcţia F este continuă .

Derivabilitate. Să presupunem că f este continuă , $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă şi funcţia F din $(**)$ este definită . Dacă integrala $G(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ converge uniform, atunci F este derivabilă şi $F' = G$.

Criteriu de convergenţă uniformă . Dacă $|f(x,y)| \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b)$ şi $y \in (c,d)$ şi $\int_a^b g$ este convergentă , atunci $\int_a^b f(x,y)dx$ converge uniform.

Funcţiile B **şi** Γ. Exemple importante de funcţii definite prin integrale improprii cu parametri sunt funcţiile B şi Γ:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad p,q>0$$

şi

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad \alpha>0.$$

Avem:

i) $\Gamma(1)=1$,

ii) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$,

iii) $\Gamma(n+1)=n!,\quad \forall n\in\mathbb{N}$,

iv) $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,

v) $\mathrm{B}(p,1-p)=\dfrac{\pi}{\sin\pi p},\ \ 0<p<1.$

Capitolul 12

Integrala curbilinie

Drum parametrizat. Se numeşte **drum parametrizat de clasă** C^k (pe scurt, **drum de clas** C^k) în $\mathbb{R}^n$ o aplicaţie de clasă C^k $\varphi : [a,b] \to\mathbb{R}^n$ ($[a,b] \subset\mathbb{R}$). Imaginea intervalului $[a,b]$ prin funcţia φ este o submulţime compactă în $\mathbb{R}^n$ care se numeşte şi **imaginea drumului** şi va fi notată $\mathcal{I}_\varphi$. Vom nota, în legătură cu o posibilă intuiţie cinematică , variabila în $[a,b]$ cu t. Punctele A $= \varphi(a)$,B $= \varphi(b)$ sunt **extremităţile** drumului. Dacă A = B drumul se zice **închis**. Dacă $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ şi φ este de clasă C^1, atunci există o identificare naturală $\varphi'(t) = \left(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), ..., \varphi_n'(t)\right)$. Este util de scris drumul φ "desfăşurat": $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), ..., x_n = \varphi_n(t)$.

Conexiune prin arce. O mulţime $M\subseteq\mathbb{R}^n$ este **conexă prin arce** dacă pentru orice două puncte A, B $\in M$ există un drum continuu cu imaginea în M şi de extremităţi A, B. Se zice, pe scurt, că orice două puncte din M pot fi unite printr-un drum în M.

Propoziţia 12.1. *i) Fie M conexă prin arce şi $f : M \to\mathbb{R}$ o funcţie continuă care nu se anulează . Atunci f păstrează un semn constant pe M.*

ii) Dacă M este deschisă , conexă prin arce şi $f : M \to\mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă astfel încât $\nabla f = 0$, atunci f este constantă .

Lungimea unui drum. Fie $\varphi : [a,b] \to\mathbb{R}^n$ un drum parametrizat şi fie $\Delta = \{t_0, t_1, ..., t_k\}, a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Definim $L_\Delta(\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1} - \alpha(t_i))\|$ (lungimea "liniei poligonale" determinate de punctele $\varphi(t_0), \varphi(t_1), ..., \varphi(t_k)$). Fie $L(\varphi) = \sup\limits_\Delta L_\Delta(\varphi)$, marginea superioară a mulţimii numerelor $L_\Delta(\varphi)$ când Δ parcurge mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a,b]$. In general $L(\varphi)\in [0,\infty]$. Dacă $L(\varphi) \in$ spunem că drumul φ este **rectificabil** şi numărul $L(\varphi)$ este, prin definiţie, **lungimea drumului** φ.

Teorema 12.1. *Dacă drumul φ este de clasă C^1, atunci este rectificabil şi avem $L(\varphi) = \int_a^b \left\|\varphi'(t)\right\| dt$.*

(reamintim că avem $\left\|\varphi'(t)\right\| = \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + ... + \varphi_n'^2(t)}$ *).*

Exemplu. Fie drumul $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Imaginea drumului este cercul unitate. Un calcul simplu arată că $L(\varphi)=2\pi$.

Integrarea funcţiilor. Fie $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum şi $f : \mathcal{I}_\varphi \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. **Integrala funcţiei *f* pe drumul** φ este $\int_\varphi f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \left\|\varphi'(t)\right\| dt$ (membrul stâng este o notaţie). Se observă că lungimea drumului este integrala funcţiei constantă $f \equiv 1$ pe drumul respectiv. Integrala funcţiilor pe drumuri parametrizate se mai numeşte **integrală curbilinie de primul tip**. Interpretarea fizică a integralei este, de exemplu, calculul masei unui "fir" descris de parametrizarea φ atunci când se cunoaşte densitatea *f*.

Câmp vectorial. Se numeşte **câmp vectorial** pe mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ orice funcţie $\boldsymbol{V}$: $A \to \mathbb{R}^n$. Dacă $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, ..., V_n)$ atunci funcţiile reale $V_1, V_2, ..., V_n$ sunt **componentele** câmpului. Un câmp se zice de clasă C^k dacă toate componentele sunt de clasă C^k. In cazul planului vom nota componentele unui câmp cu P, Q iar în cazul spaţiului cu P, Q, R.

Exemplu. Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ atunci gradientul ∇f al funcţiei f este un exemplu important de câmp vectorial (a se vedea şi Capitolul 4).

Circulaţia unui câmp. Fie $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum şi $\boldsymbol{V}$ un câmp vectorial continuu pe $\mathcal{I}_\varphi$. Se defineşte **circulaţia câmpului *V* pe drumul** φ prin:

$$\int_\varphi V \cdot dr = \int_a^b \left(V_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + V_2(\varphi(t))\varphi_2'(t) + ... + V_n(\varphi(t))\varphi_n'(t) \right) dt$$

Să observăm că dacă scriem $\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = V_1 \mathrm{d}x_1 + V_2 dx_2 + ... + V_n \mathrm{d}x_n$ şi folosim forma "desfăşurată " de scriere a drumului formula de mai sus se reţine cu uşurinţă .

Circulaţia unui câmp vectorial se mai numeşte **integrală curbilinie de al doilea tip**.

Dacă V este un câmp de forţe, atunci circulaţia se interpretează ca lucru mecanic.

Exemplu. Să considerăm câmpul vectorial $\boldsymbol{V} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ definit pe $\mathbb{R}^2$-$\{0\}$ şi de clasă C^∞. Să calculăm circulaţia acestui câmp pe drumul $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$. Se obţine imediat $\int_\varphi V \cdot dr = 2\pi$. Poate părea surprinzător că circulaţia nu depinde de a (imaginea drumului este cercul cu centrul în 0 şi de rază a). Acest fapt se explică prin aceea că , în acest caz, circulaţia exprimă mărimea unghiului parcurs la o rotire completă .

Câmp de gradienţi. Un câmp vectorial $\boldsymbol{V}$ pe o mulţime deschisă se zice **câmp de gradienţi** dacă există o funcţie de clasă C^1 astfel încât $\boldsymbol{V} = \nabla f$. În acest caz funcţia f este un **potenţial scalar** al câmpului $\boldsymbol{V}$.

Independenţă de drum. Fie $\boldsymbol{V}$ un câmp de gradienţi pe mulţimea deschisă $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ şi f un potenţial scalar al câmpului $\boldsymbol{V}$. Pentru orice drum φ astfel încât $\mathcal{I}_\varphi \subset \Omega$ avem $\int_\varphi V \cdot dr = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$(circulaţia depinde doar de extremităţile drumului; să observăm că dacă Ω este conexă prin arce două potenţiale ale unui câmp diferă printr-o constantă). În particular circulaţia unui câmp de gradienţi pe un drum închis este nulă.

Exemplu. Câmpul vectorial din exemplul precedent nu este un câmp de gradienţi; ntegrala pe drumul închis din exemplu nu este nulă.

Remarcă . Integrala curbilinie de al doilea tip a fost prezentată ca circulaţie a câmpurilor vectoriale. Un mod echivalent de prezentare utilizează **formele diferenţiale**.
Fie $\boldsymbol{V}= (V_1, V_2, ..., V_n)= \nabla f$ un câmp de gradienţi de clasă C^1. Din egalitatea derivatelor parţiale mixte ale funcţiei f obţinem $(*)\dfrac{\partial V_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial V_j}{\partial x_i} : i, j = 1, 2, ..., n$. Aceste condiţii sunt deci necesare pentru ca un câmp de clasă C^1 să fie câmp de gradienţi.

Teorema 12.2. ***(Poincaré).*** *Fie* $\boldsymbol{V}$ *un câmp de clasă* C^1 *satisfăcând condiţiile* $(*)$ *pe bila deschisă* $B(0,R)$. *Atunci* $\boldsymbol{V}$ *este un câmp de gradienţi pe* $B(0,R)$. *In plus, un potenţial scalar este*

$$f(x) = \int_0^1 (\sum_{i=1}^n x_i V_i(tx_1, tx_2, ..., tx_n))dt.$$

Teorema poate fi enunţată şi sub forma: dacă $\boldsymbol{V}$ este un câmp de clasă C^1 satisfăcând condiţiile $(*)$ pe mulţimea deschisă Ω, atunci $\boldsymbol{V}$ este "local" un câmp de gradienţi (fiecare punct are o vecinătate pe care există un potenţial scalar). In general $\boldsymbol{V}$ nu este global un câmp de gradienţi. Un bun exemplu în acest sens îl constituie câmpul $\boldsymbol{V}=(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ discutat într-un exemplu anterior.

Mulţime stelată . O mulţime $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se zice **stelată** în raport cu $a \in M$ dacă pentru orice $x \in M$ segmentul de dreaptă $[a, x] \subseteq M$. Spunem că M este **stelată** dacă este stelată în raport cu un punct al ei.

Exemplu. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nu este stelată .

Teorema 12.3. *Fie* $\boldsymbol{V}$ *un câmp de clasă* C^1 *satisfăcând condiţiile* $(*)$ *pe mulţimea deschisă şi stelată* Ω. *Atunci* $\boldsymbol{V}$ *este un câmp de gradienţi pe* Ω. *In particular, aceasta se întâmplă pentru* $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Schimbare de parametru (**variabilă**). Se numeşte **schimbare de parametru** o aplicaţie de clasă C^1, bijectivă $\theta : [a, b] \to [c, d]$ astfel încât inversa θ^{-1} este de clasă C^1. O schimbare de parametru este fie strict crescătoare (**directă**) fie strict descrescătoare.

Arc. Două drumuri parametrizate de clasă C^1 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ se zic **echivalente**, $\varphi \sim \psi$, dacă există o schimbare de parametru $\theta : [a,b] \to [c,d]$ astfel încât $\varphi = \psi \circ \theta$. Două drumuri echivalente au aceeaşi imagine. Relaţia "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă (reflexivă, simetrică, tranzitivă). Se numeşte **arc** (**de clasă** C^1), în $\mathbb{R}^n$, o clasă de echivalenţă γ faţă de relaţia "$\sim$". Dacă $\varphi \in \gamma$ spunem că φ este o **parametrizare admisibilă** pentru arcul γ. Vom nota cu $\mathcal{I}_\gamma$ imaginea comună a drumurilor din γ şi o vom numi **imagine a arcului** γ.

Integrala funcţiilor pe arce. Fie γ un arc în $\mathbb{R}^n$ şi $f : \mathcal{I}_\gamma \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci dacă $\varphi, \psi \in \gamma$ rezultă $\int_\varphi f ds = \int_\psi f ds$. Se poate defini deci, fără ambiguitate, **integrala funcţiei** f **pe arcul** γ prin $\int_\gamma f ds = \int_\varphi f ds$ pentru o parametrizare admisibilă $\varphi \in \gamma$. In particular, putem vorbi fără ambiguitate de **lungimea unui arc**.

Arc orientat. Două drumuri parametrizate de clasă C^1 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ se zic **direct echivalente**, $\varphi \sim_\circ \psi$, dac există o schimbare **directă** de parametru $\theta : [a,b] \to [c,d]$ astfel încât $\varphi = \psi \circ \theta$. Două drumuri direct echivalente sunt echivalente. Relaţia "$\sim_\circ$" este o relaţie de echivalenţă Se numeşte **arc orientat** (**de clasă** C^1), în $\mathbb{R}^n$, o clasă de echivalenţă γ faţă de relaţia "$\sim_\circ$". Dacă $\varphi \in \gamma$ spunem că φ este o **parametrizare admisibilă** pentru arcul γ.

Circulaţia unui câmp vectorial pe un arc orientat. Fie γ un arc orientat în $\mathbb{R}^n$ şi $\boldsymbol{V}$ un câmp continuu pe imaginea arcului. Atunci dacă $\varphi, \psi \in \gamma$ rezultă $\int_\varphi V \cdot dr = \int_\psi V \cdot dr$. Se poate defini deci, fără ambiguitate, **circulaţia câmpului** $\boldsymbol{V}$ **pe arcul** γ prin $\int_\gamma V \cdot dr = \int_\varphi V \cdot dr$ pentru o parametrizare admisibilă $\varphi \in \gamma$.

Capitolul 13

Integrala dublă şi integrala triplă

Integrala dublă

Fie A=$[a, b] \times [c, d]$, $a \leq b, c \leq d$ un dreptunghi în $\mathbb{R}^2$. Definim **aria** dreptunghiului A ca fiind σ(A)=$(b-a) \times (d-c)$. O **diviziune** Δ a dreptunghiului A este o pereche Δ_1, Δ_2, unde Δ_1 este o diviziune a intervalului $[a, b]$, iar Δ_2 o diviziune a intervalului $[c, d]$. Prin paralele la laturi, o diviziune împarte dreptunghiul în "sub"dreptunghiuri şi vom nota un asemenea subdreptunghi generic cu $S \in \Delta$. Avem $\sigma(A) = \sum\limits_{S \in \Delta} \sigma(S)$.

Este evident ce se înţelege spunând că o diviziune este **mai fină** decât alta şi este uşor de văzut că , date două diviziuni, există una mai fină decât ambele.

Sume Darboux. Fie f :$A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi Δ o diviziune a dreptunghiului A. Pentru fiecare $S \in \Delta$ notăm $M_S(f) = \sup\limits_S f, m_S(f) = \inf\limits_S f$ şi definim **sumele Darboux**

$$U(\Delta, f) = \sum_S M_S(f)\sigma(S), L(\Delta, f) = \sum_S m_S(f)\sigma(S).$$

Propoziţia 13.1. *Fie Δ_1, Δ_2 diviziuni ale dreptunghiului A.*

i) Dacă Δ_2 este mai fină decât Δ_1, atunci $L(\Delta_1 f) \leq L(\Delta_2 f)$ şi $U(\Delta_2, f) \leq U(\Delta_1, f)$.

ii) $L(\Delta_1, f) \leq U(\Delta_2, f)$ (Δ_1, Δ_2 arbitrare).

Integrabilitate (**pe dreptunghi**). Fie f o funcţie **mărginită** pe dreptunghiul A. Spunem că funcţia f este **integrabilă pe** A dacă (*) $\sup\limits_{\Delta} L(\Delta, f) = \inf\limits_{\Delta} U(\Delta, f)$. In acest caz, se defineşte **integrala** (**dublă**) a funcţiei f pe A, $\iint_A f(x, y)dxdy$, ca fiind valoarea comună din (*). Vom nota şi $\iint_A f$ integrala funcţiei *f*. Remarcăm că integrala funcţiei $f \equiv 1$ este $\sigma(A)$.

Exemplu. Fie $\xi_{(a,b)} : A \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in A$ funcţia definită astfel: $\xi_{(a,b)}(x,y) = 0$, $(x,y) \neq (a,b), \xi_{(a,b)}(a,b) = 1$. Funcţia este integrabilă şi are integrala nulă.

Teorema 13.1. *Funcţia mărginită f este integrabilă pe A dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta$ astfel încât $U(\Delta, f) - L(\Delta, f) < \varepsilon$.*

Proprietăţile funcţiilor integrabile. Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$ funcţii mărginite,
i) Dacă f, g sunt integrabile, atunci funcţia $f+g$ este integrabilă şi

$$\iint_A (f+g)(x,y)dxdy = \iint_A f(x,y)dxdy + \iint_A g(x,y)dxdy.$$

ii) Dacă f este integrabilă şi $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci funcţia αf este integrabilă şi

$$\iint_A (\alpha f)(x,y)dxdy = \alpha \iint_A f(x,y)dxdy.$$

iii) Dacă f, g sunt integrabile şi $f \leq g$, atunci

$$\iint_A f(x,y)dxdy \leq \iint_A g(x,y)dxdy.$$

iv) Dacă f este integrabilă , atunci $|f|$ este integrabilă şi

$$\left| \iint_A f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_A |f(x,y)|\, dxdy.$$

v) Dacă Δ este o diviziune, atunci f este integrabilă pe A dacă şi numai dacă pentru orice $S \in \Delta$ restricţia $f_{/S}$ a funcţiei f la S este integrabilă pe S. In acest caz avem:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \sum_{S \in A} f_{/S}(x,y)dxdy.$$

Teorema 13.2. *Funcţiile continue sunt integrabile.*

Teorema 13.3. *(**integrale iterate**). Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă atunci:*

$$(**) \iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

ultima egalitate fiind o notaţie.

Această teoremă reduce calculul unei integrale duble la două integrale "simple". Putem interpreta rezultatul ca o teoremă de integrare a unei funcţii definite printr-o integrală.

Vom extinde definiţia integrabilităţii pentru funcţii definite pe mulţimi mai generale decât dreptunghiurile.

Fie $K \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime compactă şi $f; K \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită . Dacă A este un dreptunghi, $K \subseteq A$ definim funcţia $f_A : A \to \mathbb{R}$ egală cu f pe K şi 0 în rest.

Integrabilitate (**pe mulţimi compacte**). Spunem că funcţia f **este integrabilă pe** K dacă există un dreptunghi $A \supseteq K$ astfel încât funcţia f_A să fie integrabilă pe Δ. In acest caz punem, prin definiţie $\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_A \mathrm{f}_A(x,y)dxdy$. Atât integrabilitatea cât şi valoarea integralei sunt independente de dreptunghiul A.

Măsură Jordan nulă . O mulţime $M \subseteq \mathbb{R}^2$ are măsură (Jordan) nulă dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists$ dreptunghiuri $A_1, ..., A_n$ astfel încât $M \subseteq \bigcup\limits_i A_i$, $\sum_1^n \sigma(A_i) < \varepsilon$.

Mulţime măsurabilă (**Jordan**). O mulţime $M \subseteq \mathbb{R}^2$ este **măsurabilă** (**Jordan**) dacă este mărginită şi frontiera (a se vedea Capitolul 2) $\mathrm{Fr}M$ are măsură nulă.

Teorema 13.4. *Fie $K \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime compactă măsurabilă şi $f; K \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă . Atunci f este integrabilă pe K. In particular funcţia 1 (constant egală cu 1) este integrabilă pe K şi $\iint_K 1dxdy$ este, prin definiţie, aria $\sigma(K)$ a compactului K ; de obicei, se scrie $\sigma(K) = \iint_K dxdy$.*

Proprietăţile funcţiilor integrabile. Proprietăţile i),ii),iii),iv) ale funcţiilor integrabile pe dreptunghi rămân valabile şi în cazul funcţiilor integrabile pe mulţimi compacte. Pentru proprietatea v) avem : dacă L, K sunt compacte astfel încât $L \bigcap K$ are măsură nulă şi f este integrabilă pe L şi pe K, atunci f este integrabilă pe $L \bigcup K$ şi

$$\iint_{L \bigcup K} f = \iint_L f + \iint_K f.$$

Intergrafic. Fie $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 şi $\varphi \leq \psi$. **Intergraficul** determinat de φ, ψ este mulţimea compactă

$$K = \{(x,y) : x \in [a,b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Intergraficul K este o mulţime măsurabilă . Fie $f : K \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă Avem:

$$(***) \iint_K f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Rezultă , în particular $\sigma(K) = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx$.

Exemplu. Fie intergraficul K determinat de funcţiile $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = x^2, \psi(x) = x$ şi funcţia $f; K \to \mathbb{R}$,$f(x,y) = y$. Avem :

$$\iint_K ydxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x ydy = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{1}{15}.$$

Schimbare de variabile. Fie W, Ω mulţimi deschise în $\mathbb{R}^2$; o aplicaţie $\Phi : W \to \Omega$ este o **schimbare de variabile** dacă : Φ este bijectivă, de clasă C^1 şi Φ^{-1} este de clasă C^1.

Teorema 13.5. *(**schimbarea de variabile**). Fie $\Phi : W \to \Omega$ o schimbare de variabile (vom nota variabilele cu u,v în W şi cu x,y în Ω), L o submulţime compactă în W , K= $\Phi(L)$ şi $f; K \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă L,K sunt măsurabile şi f este integrabilă pe K, atunci $f \circ \Phi$ este integrabilă pe L şi*

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \iint_L f \circ \Phi(u,v) \left| J_\Phi(u,v) \right| dudv$$

unde $J_\Phi(u,v)$ =det$\Phi'(u,v)$(determinantul matricei iacobiene).

Exemplu. Fie W=$(0,\infty)\times(0,2\pi)$. Notând, tradiţional, cu *r,t* variabilele în W (**coordonatele polare**), aplicaţia $\Phi, \Phi(r,t) = (r\cos t, r\sin t)$ este o schimbare de variabile; $J_\Phi(r,t) = r$**.** In condiţiile teoremei de mai sus avem:

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \iint_L f(r\cos t, r\sin t) r dr dt.$$

Integrala triplă

Integrala triplă se referă la integrarea în $\mathbb{R}^3$. Teoria urmează pas cu pas teoria făcută pentru integrala dublă înlocuind dreptunghiurile cu paralelipipede: A= $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $a_i \le b_i, i = 1,2,3$. Volumul unui paralelipiped se defineşte ca $\nu(A) = [b_1 - a_1] \times [b_2 - a_2] \times [b_3 - a_3]$ etc. Vom nota integrala triplă cu $\iiint_K f(x,y,z)dxdydz$ pentru mulţimi compacte $K \subset \mathbb{R}^3$.

Intergrafic. Fie $\varphi, \psi : L \to \mathbb{R}$, L un dreptunghi în $\mathbb{R}^2$, φ, ψ de clasă C^1 şi $\varphi \le \psi$. **Intergraficul** determinat de φ, ψ este mulţimea compactă $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in L, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$. Intergraficul K este o mulţime măsurabilă . Fie $f; K \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă . Avem:

$$(****) \iiint_K f(x,y,z)dxdydz = \iint_L dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Rezultă , în particular, $\nu(K) = \iint_L (\psi(x,y) - \varphi(x,y))dxdy$.

Schimbare de variabile (exemple). Fără să mai insistăm asupra mulţimilor deschise respective vom da două schimbări de variabile clasice.

i) **Coordonate cilindrice:**

$x = r\cos t, y = r\sin t, z = z, r > 0$ etc (r,t sunt coordonatele polare în plan). Iacobianul este J=r .

ii**)** **Coordonate sferice**: $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$, $r > 0, \theta \in (o,\pi), \varphi \in (0,2\pi)$, etc ($r$ este distanţa la origine, θ unghiul razei vectoare *u* axa O*z,* iar φ unghiul polar al proiecţiei punctului pe planul xOy. Iacobianul este J= $r^2 \sin\theta$ etc.

Capitolul 14

Integrala de suprafaţă

Vom considera doar cazul suprafeţelor în $\mathbb{R}^3$. Prezentarea este apropiată în spirit, de cea a arcelor. O deosebire este definirea parametrizărilor pe mulţimi deschise pentru a lucra cu funcţii de clasă C^1 fără convenţii suplimentare.

Pânză parametrizată. Vom numi **pânză parametrizată de clasă** C^k o funcţie $\varphi : \Delta \to\mathbb{R}^3$, de clasă C^k, pe mulţimea deschisă şi conexă (prin arce) $\Delta \subseteq\mathbb{R}^2$.
Vom nota, în general, variabilele în $\mathbb{R}^2$ cu u,v şi componentele funcţiei φ prin X,Y,Z, deci $\varphi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$. A spune că φ este de clasă C^k revine la faptul că X,Y,Z sunt de clasă C^k. **Imaginea pânzei parametrizate** este, prin definiţie, $\sum_\varphi = \varphi(\Delta)$. Vom considera, în problema integrării, restricţia pănzei la submulţimi compacte măsurabile. Desfăşurat o pănză se scrie $x = X(u, v), z = Z(u, v), y = Y(u, v)$. In cele ce urmează vom considera doar pânze parametrizate de **clasă** C^k**, k**≥ 1**.** De asemenea vom spune "pânză " în loc de pânză parametrizată .

Exemplu.i) Δ=$(0, \pi) \times (0, 2\pi)$ şi $\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos v)$. Imaginea pânzei este o parte a sferei centrate în origine şi de rază 1.

ii) FieΔ deschisă şi conexă în $\mathbb{R}^2$ şi $f : \Delta \to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^k. Folosind, pentru simplitate x, y pentru notarea parametrilor definim pânza φ pe Δ prin: $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Imaginea pânzei este **graficul funcţiei** f . Vom numi acest tip de pânză **carteziană** .

iii) Fie F :$\mathbb{R}^3 \to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, $M = \{(x, y, z); F(x, y, z) = 0\}$ şi $a \in M$ astfel încât $F'_z(a) \neq 0$. Atunci, înr-o vecinătate a punctului a, mulţimea M este imaginea unei pânze carteziene (teorema funcţiilor implicite).

Normală . Dacă $\varphi : \Delta \to\mathbb{R}^3$ este pânză parametrizată , definim: $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u})$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = (\frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v})$ şi funcţia **normală** $N_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}$, unde "$\times$" este produsul vectorial. Punând $A = \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}, B = \frac{D(Z,X)}{D(u,v)}$, $C = \frac{D(X,Y)}{D(u,v)}$ cu $\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}$ etc, avem $N_\varphi = (A, B, C)$.

Exemplu. In cazul unei pânze carteziene $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ vom avea $N = (-p, -q, 1)$, unde s-a notat, tradiţional, $p = f_x^{'}, q = f_y^{'}$.

Aria unei pânze. Dacă $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ este pânză parametrizată şi K este o mulţime compactă măsurabilă $K \subset \Delta$ definim aria pânzei $\varphi_{|K}$: .

$$(*) S(\varphi_{|K}) = \iint_K \|N_\varphi(u, v)\|\, dudv.$$

Astfel avem: $S(\varphi_{|K}) = \iint_K \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$ sau $S(\varphi_{|K}) = \iint_K \sqrt{1 + p^2 + q^2} dudv$ (în cazul unei pânze carteziene).

Integrala unei funcţii. Cu notaţiile de mai sus fie f o funcţie continuă pe imaginea $\sum_{\varphi|K}$. Definim **integrala funcţiei** $\boldsymbol{f}$ pe pânza $\varphi_{|K}$ ca fiind:

$$(**) \iint_{\varphi_{|K}} f d\sigma = \iint_K f \circ \varphi(u, v)\, \|N_\varphi(u, v)\|\, dudv$$

integrala din dreapta fiind integrala dublă. Mai dezvoltat:

$$\iint_{\varphi_{|K}} f d\sigma =$$

$$= \iint_K f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} dudv.$$

Se remarcă faptul că aria este integrala funcţiei constantă 1. Dacă f reprezintă o densitate, atunci integrala ei este masa corespunzătoare.

Integrala unui câmp. Cu notaţiile de mai sus fie $\boldsymbol{V}{=}(P,Q,R)$ un câmp vectorial continuu pe imaginea $\sum_{\varphi|K}$. Definim **integrala câmpului** $\boldsymbol{V}$ pe pânza $\varphi_{|K}$ ca fiind:

$$(***) \iint_{\varphi_{|K}} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_K (PA + QB + RC) dudv.$$

Evident, membrul stâng este o notaţie în timp ce membrul drept este integrala dublă.

Normala unitară . Cu notaţiile de mai sus, să presupunem că funcţia normală N_φ este diferită de 0 în orice punct definim funcţia **normală unitară** $n_\varphi = \frac{N_\varphi}{\|N_\varphi\|}$.

Flux. Cu notaţiile de mai sus, dacă normala unitară este definită pe K, este evident că putem aduce integrala (***) a câmpului $\boldsymbol{V}$ la forma:

$$(****) \iint_{\varphi|K} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_{\varphi_{|K}} V \cdot n_\varphi d\sigma.$$

Sub această formă integrala câmpului $\boldsymbol{V}$ poartă numele de **flux al câmpului** $\boldsymbol{V}$ **prin pânza** $\varphi_{|K}$. Dacă $\boldsymbol{V}$ este câmpul de viteze al unui fluid care traversează imaginea pânzei, fluxul poate fi interpretat ca fiind cantitatea de fluid care trece în unitatea de timp.

Suprafaţă . Dacă $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$, $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sunt pânze, spunem că ele sunt **echivalente**, $\varphi \sim \psi$, dacă există o schimbare de variabile $\theta : \Delta \to \Omega, \varphi = \psi \circ \theta$.
O **suprafaţă** este o clasă de echivalenţă de pânze. Dacă S este o suprafaţă şi $\varphi \in S$ spunem că φ este o **parametrizare admisibilă** pentru S. Pânzele echivalente au aceeaşi imagine deci definim imaginea unei suprafeţe $\sum_S$ ca imaginea comună a parametrizărilor sale admisibile.

Integrala unei funcţii. Fie f o funcţie continuă pe imaginea $\sum_S$ a suprafeţei S,φ, ψ parametrizări admisibile şi K,L mulţimi compacte măsurabile care se corespund prin schimbarea de variabilă θ. Atunci $\iint_{\varphi_{|K}} f d\sigma = \iint_{\psi_{|L}} f d\sigma$. Se poate defini, deci, fără ambiguitate integrala unei funcţii pe o suprafaţă $\iint_S f d\sigma = \iint_{\varphi_{|K}} f d\sigma, \varphi \in S$. Pentru a nu complica notaţia am scris S în locul imaginii compactului K. Vom folosi şi denumirea de suprafaţă compactă în această situaţie.

Suprafaţă orientată . Dacă θ este o schimbare de variabilă atunci, având în vedere că domeniile de definiţie ale parametrizărilor sunt conexe, iacobianul J_θ este fie strict pozitiv fie strict negativ. Schimbarea θ se zice **directă** dacă iacobianul este strict pozitiv.
Scriem $\varphi \ \tilde{}_o \psi$ dacă $\varphi = \psi \circ \theta$ cu θ directă . O **suprafaţă orientată** este o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia $\tilde{}_o$". Dacă S este o suprafaţă orientată şi $\varphi \in S$ spunem că φ este o **parametrizare admisibilă** pentru S. Se arată că dacă $\varphi \ \tilde{}_o \psi$ şi normalele unitare sunt definite, atunci ele coincid pe imaginea comună . Deci normala unitară "caracterizează " orientarea.

Integrala unui câmp. Fie $\boldsymbol{V}$=(P,Q,R) un câmp vectorial continuu pe imaginea unei suprafeţe orientate compacte S. Definim **integrala câmpului** $\boldsymbol{V}$ pe S prin:
$\iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iint_\varphi Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, unde P,Q,R sunt componentele câmpului şi φ o parametrizare admisibilă . Definiţia se dovedeşte a fi corectă valoarea integralei fiind independentă de parametrizarea admisibilă aleasă .

Flux. Cu notaţiile de mai sus este clar că integrala câmpului se poate scrie, într-un sens evident, $\iint_S V \cdot n d\sigma$ purtând numele de **flux al câmpului** V prin suprafaţa orientată S.

Capitolul 15

Formule integrale

Această secţiune este dedicată formulelor Green-Riemann, Gauss - Ostrogradski şi Stokes. Felul în care vor fi prezentate aceste formule (de fapt cazuri particulare ale unei formule Stokes generale) este mai mult intuitiv decât riguros. Motivul îl constituie dificultatea de a dezvolta o teorie a varietăţilor cu bord în contextul unui text adresat mai ales celor ce aplică matematica. O tratare riguroasă ar implica noţiuni de algebră şi topologie care depăşesc nivelul acestui text.

Drum C^1 pe porţiuni. Un drum continuu $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se zice **$\mathbf{C}^1$ pe porţiuni** dacă există o diviziune $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ astfel încât pe fiecare interval $[t_{i-1}, t_i], i = 1...n$ funcţia φ să fie de clasă C^1. Integralele funcţiilor şi circulaţia câmpurilor se extind la cazul drumurilor C^1 pe porţiuni însumând integralele pe intervalele diviziunii. Extinderea se dovedeşte corectă fiind independentă de diviziunea folosită. Se trece, în mod natural, la arce şi la arce orientate etc.

Compact cu bord orientat în $\mathbb{R}^2$. Vom numi **compact cu bord orientat** o mulţime compactă $K \subset \mathbb{R}^2$ astfel încât frontiera sa să fie (local) imaginea unui drum C^1 pe porţiuni, orientat în sens trigonometric. Vom nota această frontieră cu ∂K şi o vom numi **bord orientat** şi compactul cu bord orientat cu $(K, \partial K)$.

Aşa cum am menţionat mai sus, definiţia este mai mult intuitivă decât riguroasă .

Exemplu. **Intergraficul determinat de** φ, ψ este un compact cu bord orientat definind bordul ca format din graficele funcţiilor φ, ψ şi din segmentele de dreaptă $\{(a, y) : \varphi(a) \le y \le \psi(a)\}, \{(b, y) : \varphi(b) \le y \le \psi(b)\}$ orientarea pe fiecare porţiune fiind astfel încât orientarea întregului bord să fie în sens trigonometric.

Formula Green-Riemann. Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat în $\mathbb{R}^2$ şi $\boldsymbol{V}=(P, Q)$ un câmp de clasă C^1 pe o mulţime deschisă care conţine K. Atunci :

$$\int_{\partial K} V \cdot dr = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \text{ (**formula Green-Riemann**).}$$

Calculul ariei. Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat . Atunci:

$$\sigma(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} xdy - ydx$$

Exemplu. Fie compactul cu bord orientat $K = \{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ cu bordul elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; a, b > 0$ "orientată " în sens trigonometric. Aplicând formula de mai sus se obţine $\sigma(K) = \pi ab$.

Vom stabili formula Gauss-Ostrogradski doar în cazul simplu al unui intergrafic. Formula se generalizează pentru compacţi cu bord orientat în $\mathbb{R}^3$ dar nu vom intra în detalii privind această noţiune. Un alt mod de a extinde formula este de a considera compacţi care se pot descompune, prin plane paralele cu planele de coordonate îcompacţi de tip intergrafic.

Fie un intergrafic K în $\mathbb{R}^3$ determinat de două funcţii de clasă C^1 $\varphi, \psi : L \to\mathbb{R}$, $\varphi \leq \psi$, unde L este un compact măsurabil în $\mathbb{R}^2$. Deci $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in L, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$. Frontiera compactului K este compusă din graficele funcţiilor φ, ψ şi din mulţimea C a punctelor de forma (x, y, z), unde punctul (x, y) aparţine frontierei compactului L, iar $\varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$. Vom considera graficele funcţiilor φ, ψ ca imagine de suprafeţe orientate corespunzătoare parametrizărilor carteziene respective alegând, pe fiecare, orientarea dată de normala exterioară (sensul acesteia indicând "părăsirea compactului" sau altfel spus, pe graficul funcţiei ψ normala are sensul "creşterii lui z" iar pe graficul funcţiei φ sensul descreşterii lui z). Notăm aceste suprafeţe orientate cu S_1 respectiv S_2. Vom considera şi mulţimea C ca imaginea unei suprafeţe orientate după normala exterioară S_3. Suprafeţele S_1, S_2, S_3 formează bordul orientat ∂K al compactului K. Perechea $(K, \partial K)$ este un **compact cu bord orientat**. Fluxul unui câmp prin ∂K este, prin definiţie, suma fluxurilor prin cele trei componente ale bordului.

Propoziţia 15.1. *Fie câmpul vectorial V=(0,0,R), unde funcţia R este de clasă C^1 în vecinătatea compactului K. Atunci:*

$$\iint_{\partial K} V \cdot n d\sigma = \iiint_K \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

Considerând compacţi cu bord orientat proveniţi din intergrafice în raport cu celelalte axe vom obţine formule analoage celei de mai sus.

Divergenţa unui câmp. Dacă $V = (P, Q, R)$ este un câmp de clasă C^1 **divergenţa** sa $divV$ se defineşte prin $divV= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Formula Gauss-Ostrogradski. Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat, intergrafic în raport cu toate axele, cu bordul orientat după normala exterioară , şi $V = (P, Q, R)$ un câmp de clasă C^1 în vecinătatea lui K. Atunci:

$\iint_{\partial K} V \cdot n d\sigma = \iiint_K divV dxdydz$ (**formula Gauss-Ostrogradski**)
Formula de mai sus se numeşte şi **formula flux-divergenţă** .

Calculul volumului. Fie $(K, \partial K)$un compact cu bord orientat ca în formula de mai sus. Atunci pentru volumul compactului K obţinem:

$$v(K) = \frac{1}{3}\iint_{\partial K} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Aşa cum am afirmat mai sus, formula Gauss-Ostrogradski se extinde la o clasă mai generală de compacţi cu bord orientat; o extensie rapidă se poate face la acei compacţi care se pot descompune, prin plane paralele cu planele de coordonate în compacţi de tip intergrafic.

Pentru prezentarea formulei Stokes vom considera un caz simplu. Fie $(L, \partial L)$ un compact cu bord orientat în $\mathbb{R}^2$ şi f o funcţie de clasă C^2 în vecinătatea mulţimii L. Vom considera suprafaţa orientată S indusă de pânza carteziană determinată de f cu orientarea normalei în sensul creşterii variabilei z (funcţia normală fiind, cu o notaţie mai sus folosită , $(-p, -q, 1)$). Restricţia parametrizării la ∂L determină un arc orientat (C^1 pe porţiuni) astfel încât orientarea suprafeţei să fie compatibilă cu cea a arcului în sensul "regulei burghiului".
Vom numi bord al suprafeţei S acest arc orientat iar perechea $(S, \partial S)$ va fi o **suprafaţă orientată cu bord orientat.**

Rotor al unui câmp vectorial. Fie V=(P, Q, R) un câmp vectorial de clasă C^1. Vom numi **rotor** al câmpului V câmpul vectorial

$$rotV = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}).$$

Se reţin, cu uşurinţă, componentele rotorului dacă se consideră determinantul "formal":

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ care se "dezvoltă" după prima linie (a bazei canonice, sau a versorilor axelor) şi în care "înmulţirea " unui operator de derivare cu o funcţie înseamnă aplicarea operatorului funcţiei respective.

Formula Stokes. Fie $(S, \partial S)$ o suprafaţă orientată cu bord orientat şi V un câmp vectorial de clasă C^1 în vecinătatea imaginii suprafeţei S. Atunci:

$\int_{\partial S} V \cdot dr = \iint_S rotV \cdot n d\sigma$ (**formula Stokes**).
Formula Stokes se extinde la suprafeţe orientate cu bord orientat mai generale dar nu vom intra în detalii.

Operatorul nabla. Definim "operatorul" **nabla** $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$**.**
Putem interpreta formal gradientul unei funcţii, divergenţa şi rotorul unui câmp astfel:
$grad\ f = \nabla f$ "produsul" operatorului cu câmpul scalar f,

$div V = \nabla \cdot V$ ”produsul scalar” al operatorului cu câmpul vectorial V,
$rot V = \nabla \times V$ ”produsul vectorial” al operatorului cu câmpul vectorial V.
Desigur ”produs” înseamnă aplicarea operatorului iar justificarea formală a acestei scrieri este uşor de intuit. Prin câmp scalar înţelegem funcţie cu valori reale.

Remarcă. Operatorii gradient, divergenţă, rotor se pot aplica succesiv obţinându-se noi operatori importanţi. Astfel, dacă f este de clasă C^2 atunci $div(grad\ f) = \Delta f$ este **laplacianul** funcţiei f,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Capitolul 16

Funcţii olomorfe şi teorema reziduurilor

In acest capitol vom studia funcţii de variabilă complexă şi cu valori complexe. Reamintim corespondenţa bijectivă dintre $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{R}^2$ $x+\mathrm{i}y \leftrightarrow (x,y)$ în care distanţei dintre numere complexe îi corespunde distanţa uzuală în plan. Trimitem la Capitolul 3 pentru noţiunile de bilă deschisă, bilă închisă, mulţime închisă etc. Vom utiliza termenul de "**disc**" în loc de bilă (din raţiuni intuitive evidente) şi notaţia $D(a,r)$ în loc de $B(a,r)$ etc.

Funcţie olomorfă. Fie Ω o mlţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie. Spunem că funcţia f este **derivabilă** în punctul $a \in \Omega$ dacă există limita :

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a)$$

($f'(a) \in \mathbb{C}$ şi egalitatea este o notaţie). Dacă funcţia este derivabilă în orice punct din Ω, atunci spunem că este **olomorfă** pe Ω. Notăm f' derivata funcţiei f.

Proprietăţi.

i) Dacă f este olomorfă pe Ω, atunci este continuă pe Ω.

ii) Dacă f, g sunt olomorfe pe Ω, atunci şi $f+g$ este olomorfă pe Ω şi $(f+g)' = f' + g'$.

iii) Dacă f, g sunt olomorfe pe Ω, atunci fg este olomorfă pe Ω şi $(fg)' = f'g + fg'$.

iv) Dacă f, g sunt olomorfe şi $h = g \circ f$, atunci h este olomorfă şi $h'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

v) Dacă f, g sunt olomorfe pe Ω, $g(z) \neq 0$, $\forall z$, atunci $\frac{f}{g}$ este olomorfă şi $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Se observă că regulile de derivare de la funcţiile reale sunt valabile şi în cazul funcţiilor complexe ceea ce este normal, definiţia fiind "formal" aceeaşi.

Exemple. i) Fie $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Este imediat de văzut că f este olomorfă şi $f'(z) = nz^{n-1}$.

ii) Din i) rezultă că funcţiie polinomiale sunt funcţii olomorfe şi derivarea se face similar cazului real. Analog funcţiile raţionale unde nu se anulează numitorul etc.

Serie de puteri. Se numeşte **serie de puteri** (în $\mathbb{C}$) o serie de funcţii de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$. Numerele complexe a_n se numesc **coeficienţii seriei**.

Rază de convergenţă. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ o serie de puteri. Există (şi este unic) $R \in [0, \infty]$, numit **raza de convergenţă** a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, astfel încât:

i) Dacă $|z| < R$, atunci seria de numere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolut. In particular, seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge simplu pe $(-R, R)$. In cazul $R = 0$ singurul punct de convergenţă al seriei este $z = 0$.

ii) Dacă $0 < r < R$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$converge uniform pe $D(0, r)$.

In particular, dacă $R = \infty$ seria converge uniform pe orice disc închis.

Următorul rezultat este important:

Teorema 16.1. *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *cu raza de convergenţă* $R > 0$ *şi fie* f *suma seriei pe discul de convergenţă* $D(0, r)$*. Atunci:*

i) Funcţia f *este olomorfă pe* $D(0, r)$ *şi* $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *(derivare termen cu termen).*

ii) Funcţia f *are derivate de orice ordin pe* $D(0, r)$ *şi acestea se obţin prin derivare termen cu termen (în particular toate aceste derivate sunt funcţii olomorfe).*

Obţinem noi exemple de funcţii olomorfe utilizând seriile de puteri:

Funcţia exponenţială. $\exp(z) = \mathrm{e}^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$ pentru $z \in \mathbb{C}$.

Evident $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$. Funcţia exp are perioada $2\pi\mathrm{i}$.

Funcţia sinus. $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$, $z \in \mathbb{C}$.

Funcţia cosinus. $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, $z \in \mathbb{C}$.

Formula lui Euler. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Exerciţiu. Arătaţi că $\sin' = \cos, \cos' = -\sin$.

Remarcă. Se pot considera, mai general, serii Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$; rezultatele sunt similare celor de mai sus.

Este absolut remarcabil că funcţiile olomorfe sunt, local, sume de serii de Taylor.

Teorema 16.2. *Fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe Ω. Atunci pentru fiecare punct $a \in \Omega$ există un disc deschis, conţinut în Ω pe care f este suma unei serii Taylor (unic determinată).*

Ecuaţiile (condiţiile) Cauchy-Riemann. Fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe Ω. Considerăm partea reală u şi partea imaginară v ale funcţiei f $(f = u + \mathrm{i}v)$. Atunci funcţiile u, v au, ca funcţii de două variabile reale, derivate parţiale de orice ordin şi :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

aceste ecuaţii se numesc ecuaţiile (condiţiile) Cauchy-Riemann.

Este imediat de văzut că funcţiile u, v de mai sus sunt armonice, adică verifică ecuaţia lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Integrala. Dacă f este o funcţie de variabilă complexă, cu valori complexe $f = u+\mathrm{i}v$ avem $f(z)dz = (u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy) = udx-vdy+\mathrm{i}(vdx+udy)$ şi definim integrala prin $\int_\gamma f dz = \int_\gamma udx - vdy + \mathrm{i}\int_\gamma vdx + udy$; dacă $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ este o parametrizare admisibilă pentru arcul orientat γ, atunci $\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Exemplu. Fie $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = z_0+Re^{\mathrm{i}t}$, $R > 0$ şi γ arcul orientat generat de φ. Atunci $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi\mathrm{i}$.

Teorema 16.3. *(Cauchy) Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat în plan şi f o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă care conţine K. Atunci $\int_\gamma f dz = 0$.*

Demonstraţie. Se aplică formula Green-Riemann ţinându-se cont de condiţiile Cauchy-Riemann. □

Teorema 16.4. *(Formula Cauchy) Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat în plan şi f o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă care conţine K. Dacă z_0 este un punct interior compactului K, atunci*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Demonstraţie. Se consideră compactul obţinut înlăturând un disc deschis centrat în z_0 şi conţinut în K; se aplică teorema lui Cauchy şi se face raza discului să tindă la 0. $\square$

Serie Laurent. Fie o serie în $\mathbb{C}$ de forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n$. Vom spune că seria converge dacă converg simultan seriile $\sum_{0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n<0} a_n$. O **serie Laurent** este o serie (de funcţii) de forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Numerele complexe a_n sunt coeficienţii seriei. Este uşor de rezolvat că domeniul natural de convergenţă al unei serii Laurent este o **coroană circulară** $R_2 < |z| < R_1$. Evident generalizarea rezultatelor la serii Laurent de forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Teorema 16.5. *(dezvoltare în serie Laurent) i) Suma unei serii Laurent convergente în coroana circulară $R_2 < |z| < R_1$ este olomorfă în această coroană.*

ii) Reciproc, orice funcţie olomorfă într-o coroană circulară este suma unei (unice) serii Laurent.

iii) Dacă f este olomorfă în coroana $R_2 < |z| < R_1$, atunci coeficienţii seriei Laurent ataşate sunt daţi de $a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, $n \in \mathbb{Z}$.

iv) Avem rezultate similare pentru coroana $R_2 < |z - z_0| < R_1$; lăsăm ca exerciţiu formularea lor exactă.

Principiul prelungirii analitice. Fie Ω o mulţime deschisă şi conexă în plan.

i) Dacă f este olomorfă pe Ω şi în punctul $z_0 \in \Omega, f^{(n)}(z_0) = 0, \forall n \geq 0$, atunci funcţia f este identic nulă pe Ω.

ii) Zerourile (punctele unde se anulează) unei funcţii olomorfe neidentic nule pe Ω sunt izolate (adică există un disc centrat în zeroul respectiv, z_0, pe care funcţia nu se anulează decât în z_0.

Pol şi punct singular esenţial. Fie f olomorfă în discul "punctat" $0 < |z - z_0| < R$.

i) Dacă în seria Laurent ataşată, doar o mulţime finită nevidă de coeficienţi de indice negativ sunt nenuli, z_0 este un **pol** pentru f. In aceste condiţii funcţia f se scrie, in mod unic, $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$ cu g olomorfă $g(z_0) \neq 0$. Numărul natural n este **ordinul polului** z_0. Dacă $n = 1$ polul se zice simplu.

ii) Dacă in seria Laurent ataşată, o infinitate de coeficienţi de indice negativ sunt nenuli, punctul z_0 este un **punct singular esenţial** pentru f.

Exemplu. Pentru o funcţie raţională ireductibilă zerourile numitorului sunt poli.

Reziduu. Fie f o funcţie olomorfă în $0 < |z - z_0| < R$. Numim **reziduu** al funcţiei f în punctul z_0, coeficientul a_{-1} din dezvoltarea Laurent corespunzătoare. Din formulele coeficienţilor rezultă $a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z)dz$. Vom folosi notaţia $\mathrm{Rez}(f, z_0)$ pentru reziduu.

Calculul reziduului. Fie z_0 un pol de ordinul n pentru funcţia f. Atunci :

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!}[(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)}_{z=z_0}$$

Teorema 16.6. *(Teorema reziduurilor) Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat în plan şi f o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă care conţine K, cu excepţia unei mulţimi finite de puncte $z_1, z_2, \ldots, z_k$ interioare mulţimii K. Atunci :*

$$\int_{\partial K} dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_j Rez(f, z_j).$$

Aplicaţii. i) Calculul integralei $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt$, unde $R(x, y)$ este o funcţie raţională cu numitor nenul pe cercul unitate $x^2 + y^2 = 1$. Făcând schimbarea de variabilă= $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = z$ se obţine, aplicând teorema reziduurilor, $I = 2\pi \sum \mathrm{Rez} \frac{1}{z} R(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$, unde reziduurile se calculează în polii din interiorul discului unitate.

ii) Calculul integralei $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$, unde R este o funcţie raţională cu numitor care nu se anulează pe $\mathbb{R}$, în ipoteza că integrala este convergentă

Considerând un arc orientat în plan format dintr-un semicerc de rază suficient de mare, cu centrul în origine, în semiplanul superior şi diametrul respectiv, prin aplicarea teoremei reziduurilor se obţine că I este egală cu $2\pi \mathrm{i} \sum \mathrm{Rez}(R(z), z_j)$, unde z_j sunt polii funcţiei R din semiplanul superior.

Capitolul 17

Spaţii metrice. Principiul contracţiei

Reamintim că dacă A, B sunt mulţimi, atunci $A \times B$ este produsul lor cartezian.

Distanţă. O **distanţă** pe mulţimea X este o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $x, y, z \in X$:

i) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inegalitatea triunghiului).

Spaţiu metric. Un **spaţiu metric** este o mulţime X împreună cu o distanţă d fixată pe X. Se notează (X, d) un spaţiu metric sau doar X când nu este pericol de confuzie.

Exemple.

1) Fie X o mulţime arbitrară şi $d(x, y) = 0$ dacă $x = y$ şi $d(x, y) = 1$ în rest. Se verifică uşor că d este o distanţă pe X. Spaţiul metric corespunzător se zice **discret**.

2) $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ împreună cu distanţa $d(x, y) = |x - y|$.

3) Prin definiţie, $\mathbb{R}^n = \big\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\big\}$. Pentru o mai bună înţelegere precizăm că : dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, atunci $x = y$ dacă şi numai dacă $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$ (în mulţimea numerelor reale). Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definim $d(x, y) = \sqrt{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}$.

Se arată (folosind inegalitatea lui Cauchy) că d este o distanţă pe $\mathbb{R}^n$.

4) Fie M o mulţime şi $X = \big\{f;\ f : M \to \mathbb{R},\ f$ mărginită $\big\}$. Definim $d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$. Se arată (exerciţiu) că d este o distanţă.

Limita unui şir. Fie (X, d) un spaţiu metric. $x \in X$ este limita unui şir $(x_n)_n$ în X dacă : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ astfel încât dacă $n \geq N_\varepsilon$ să rezulte $d(x_n, x) < \varepsilon$. In acest caz scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau, mai simplu, $x_n \to x$.

Şir convergent. Un şir care are limită se zice **convergent**. Limita unui şir convergent este unică.

Şir Cauchy. Un şir (în X) $(x_n)_n$ se zice **şir Cauchy** dacă : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ astfel încât dacă $n, m \geq N_\varepsilon$ să rezulte $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Spaţiu metric complet. Un spaţiu metric în care orice şir Cauchy este convergent se zice **complet**.

Exerciţii.

1) A da un şir în $\mathbb{R}^n$ revine la a da n şiruri de numere reale (şirurile componentelor). Arătaţi că un şir este convergent (Cauchy) dacă şi numai dacă şirurile componentelor sunt convergente (Cauchy). Pentru un şir convergent componentele limitei sunt limitele şirurilor componentelor (limita se face "pe componente"). Deduceţi că $\mathbb{R}^n$ este un spaţiu metric complet.

2) Arătaţi că spaţiile metrice din exemplele 1) şi 4) de mai sus sunt complete.

Vom considera un spaţiu metric fixat (X, d).

Bilă deschisă. Dacă $a \in X$ şi $r > 0$, **bila deschisă de centru** a **şi rază** r este $B(a, r) = \{x;\ \ x \in X,\ \ d(x, a) < r\}$.

In $\mathbb{R}$ bilele deschise sunt intervale deschise, în $\mathbb{R}^2$ discuri fără circumferinţa care le mărgineşte, iar în $\mathbb{R}^3$ bile fără sfera care le mărgineşte. Astfel, de exemplu, în $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \in B(0, 1)$ dacă şi numai dacă $x^2 + y^2 < 1$; în $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in B(0, 1)$ dacă şi numai dacă $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

Bilă închisă. Dacă $a \in X$ şi $r > 0$, **bila închisă de centru** a **şi rază** r este $B(a, r) = \{x;\ \ x \in X,\ \ d(x, a) \leq r\}$.

Astfel, în $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \in B(0, 1)$ dacă şi numai dacă $x^2 + y^2 \leq 1$ etc.

Vecinătate. O mulţime $V \subseteq X$ este o **vecinătate** a punctului $a \in X$ dacă există $B(a, r) \subseteq V$ (o vecinătate a lui a este o mulţime care conţine o bilă deschisă centrată în a).

Este evident că orice vecinătate a unui punct conţine punctul respectiv şi că orice bilă (deschisă sau închisă) centrată în a este o vecinătate a lui a. De asemenea se observă, fără dificultate, că intersecţia a două vecinătăţi ale unui punct este o vecinătate a acelui punct. Ideea de vecinătate se leagă de studiul proprietăţilor "locale" ale funcţiilor.

Mulţime deschisă. O submulţime $A \subseteq X$ este **deschisă** (în X) dacă pentru orice $a \in A$ există $B(a, r) \subseteq A$.

Mulţimea vidă $\emptyset$ şi întreg spaţiul X sunt deschise. Un exerciţiu simplu arată că orice bilă deschisă este o mulţime deschisă.

Mulţime închisă. O submulţime $A \subseteq X$ este **închisă** (în X) dacă mulţimea $X \setminus A$ (complementara mulţimii A) este deschisă.

Evident, $\emptyset$ şi X sunt închise. Se arată că bilele închise sunt mulţimi închise.

Teorema 17.1. *Orice reuniune de mulţimi deschise este deschisă. Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este deschisă. Orice intersecţie de* *mulţimi închise este închisă. Orice reuniune finită de mulţimi închise este închisă.*

Punct aderent unei mulţimi. Un punct $a \in \mathbb{R}^n$ este aderent mulţimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă există un şir de puncte din A cu limita a.

Desigur, orice punct din A este aderent mulţimii A (se poate lua un şir constant etc.). Este simplu de văzut că 0 este aderent intervalului deschis $(0, 1)$, dar nu aparţine acestui interval.

Legătura dintre puncte aderente şi mulţimi închise este dată de :

Teorema 17.2. *O submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este închisă dacă şi numai dacă pentru orice punct a aderent mulţimii A avem $a \in A$.*

Frontieră. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se defineşte **frontiera** FrA a mulţimii A ca fiind mulţimea punctelor aderente atât mulţimii A cât şi mulţimii $\mathbb{R}^n \setminus A$. FrA este o m,ulţime închisă.

Punct interior. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un punct $a \in A$ se zice **interior** mulţimii A dacă există o vecinătate a puctului a conţinută în A.

Punct fix. Un punct fix al unei funcţii $f : X \to X$ este un element $c \in X$ astfel încât $f(c) = c$.

Contracţie. Dacă (X, d) este un spaţiu metric, o funcţie $f : X \to X$ se numeşte **contracţie** (pe X) dacă există un număr pozitiv $k < 1$ astfel încât $D(f(x), f(y)) \le d(x, y), \forall x, y \in X$.

Teorema 17.3. *(principiul contracţiei) Fie (X, d) este un spaţiu metric* ***complet*** *şi f o* ***contracţie*** *pe X. Există şi este unic un punct fix al funcţiei f.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in X$ un punct arbitrar. Construim prin inducţie un şir în X :

$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$ etc.

Vom arăta că şirul $(x_n)_n$ este un şir Cauchy. Avem pentru orice n :

$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le kd(x_{n-1}, x_n) \le k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \ldots \le k^n d(x_0, x_1)$.

Rezultă, pentru orice $n \ge 0$, $p \ge 1$ (aplicând inegalitatea triunghiului) :

$d(x_n, x_{n+p}) \le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$
$\le (k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{n+p-1}) d(x_0, x_1) = k^n \frac{1-k^p}{1-k} d(x_0, x_1)$.

In fond avem:

$d(x_n, x_{n+p}) \le k^n \frac{d(x_0, x_1)}{1-k}$, de unde rezultă că şirul $(x_n)_n$ este un şir Cauchy.

Spaţiul metric (X, d) fiind complet, şirul $(x_n)_n$ este şi convergent. Fie c limita sa.

Din inegalitatea $0 \le d(f(x_n), f(c)) \le kd(x_n, c)$ rezultă că $f(x_n) \to f(c)$; dar cum $x_{n+1} = f(x_n)$ trecând la limită vom avea $f(c) = c$.

Punctul fix a fost obţinut : să arătăm că este unic cu această proprietate.

Dacă ar mai exista un punct fix $c_1 \neq c$, atunci $d(c, c_1) = d(f(c), f(c_1)) \leq kd(c, c_1)$, de unde rezultă $1 \leq k$, o contradicţie.

Teorema este complet demonstrată. Metoda folosită în demonstraţie poartă numele de " **metoda aproximaţiilor succesive**".

□

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încât există un număr pozitiv $k < 1$ încât $|f'(x)| \leq k$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Din teorema de creşteri finite Lagrange deducem că funcţia f este o contracţie. $\mathbb{R}$ fiind un spaţiu metric complet rezultă că funcţia f are un punct fix unic.

Remarcă. In cursul demonstraţiei teoremei a fost obţinută inegalitatea:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq k^n \frac{d(x_0, x_1)}{1-k}.$$

Trecând la limită (justifcaţi!) obţinem :

$$d(x_n, c) \leq k^n \frac{d(x_0, x_1)}{1-k}$$

Interpretăm această inegalitate ca o estimare a erorii în procesul de determinare a punctului fix prin aproximări succesive pornind de la punctul $x_0 \in X$.

Exemplu şi exerciţiu. Fie în $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ecuaţia $x^3 + 12x - 1 = 0$. Ecuaţia este echivalentă cu $x = \frac{1}{x^2+12}$ şi deci cu căutarea punctelor fixe ale funcţiei $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x^2+12}$. Să se arate că funcţia este o contracţie şi să se estimeze eroarea în metoda aproximaţiilor succesive pornind din $x_0 = 0$.

Capitolul 18

Exerciţii rezolvate

18.1 Mulţimi şi relaţii

1. Pentru orice mulţimi A, B, C, avem:
   (i) dacă $A \subseteq B$ atunci $A \cup B = B$
   (ii) $A \cup B = B \cup A$
   (iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   (iv) dacă $A \subseteq B$ atunci $A \cap B = A$
   (v) $A \cap B = B \cap A$
   (vi) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   (vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (viii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (ix) dacă $A \subseteq B$ atunci $B \setminus (B \setminus A) = A$
   (x) dacă $C \supseteq B \supseteq A$ atunci $C \setminus A \supseteq C \setminus B$
   (xi) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
   (xii) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
   Ultimele două proprietăţi se numesc **legile lui De Morgan**.

   Soluţie. (iii) Demonstrăm $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$. Dacă $x \in A \cup (B \cup C)$, atunci sau $x \in A$ sau $x \in B \cup C$; dacă $x \in A$ atunci $x \in A \cup B$ şi deci $x \in (A \cup B) \cup C$. Dacă $x \in B \cup C$, atunci sau $x \in B$ sau $x \in C$; dacă $x \in B$, atunci $x \in A \cup B$ şi $x \in (A \cup B) \cup C$; dacă $x \in C$ atunci $x \in (A \cup B) \cup C$. Analog, $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.
   (xi) Incluziunea $C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$: dacă $x \in C \setminus (A \cup B)$, atunci $x \in C$ şi $x \notin A \cup B$; rezultă $x \notin A$ şi $x \notin B$, deci $x \in C \setminus A$ şi $x \in C \setminus B$; în concluzie $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
   Cealaltă incluziune: $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$; dacă $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, atunci $x \in (C \setminus A)$ şi $x \in (C \setminus B)$, deci $x \in C$ şi $x \notin A$ şi $x \notin B$. Rezultă că $x \notin A \cup B$, deci $x \in C \setminus (A \cup B)$.

2. Fie $(\mathbb{Q}, \leq)$ mulţimea numerelor raţionale cu ordinea uzuală; atunci submulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q} \; ; \; x^2 < 2\}$ este nevidă şi majorată, dar nu

are margine superioară. În mulţimea numerelor reale, $(\mathbb{R}, \leq)$ cu aceeaşi relaţie de ordine, A are margine superioară, şi anume $\sqrt{2}$. Axioma lui Cantor afirmă că în mulţimea numerelor reale orice submulţime nevidă şi majorată are margine superioară.

3. Fie $(\mathbb{N}, |)$ mulţimea numerelor naturale ordonată cu relaţia "divide" şi fie $A = \{6, 8, 12\}$; atunci A este mărginită şi $\sup(A) = 2$, $\inf(A) = 24$. Să se generalizeze exemplul la o submulţime finită arbitrară.

4. **i.** Fie $X \neq \emptyset$ şi fie $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Dacă $\mathcal{A} = \{H, K\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, atunci $\sup(\mathcal{A}) = H \cup K$ şi $\inf(\mathcal{A}) = H \cap K$.
Să se generalizeze la o submulţime arbitrară $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
ii. Fie $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Să se demonstreze:
$A = B \;\Leftrightarrow\; \forall G \in \mathcal{P}(X)\; A \cap G = B \cap G$ şi $A \cup G = B \cup G$.
iii. Fie $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Să se demonstreze:
$A = B \;\Leftrightarrow\; \exists\, G \in \mathcal{P}(X)$ astfel încât $A \cap G = B \cap G$ şi $A \cup G = B \cup G$.

5. Fie $M \neq \emptyset$ şi fie ρ o relaţie reflexivă şi tranzitivă pe M. Definim the relaţia:
$$x \sim_\rho y \;\Leftrightarrow\; x \rho\, y \text{ şi } y \rho\, x,\ \forall x, y \in M.$$
i. Să se arate că $\sim_\rho$ este o echivalenţă pe M.
ii. Fie $\widehat{M}$ mulţimea factor asociată relaţiei $\sim_\rho$. Pe $\widehat{M}$ definim relaţia $\widehat{x} \leq \widehat{y} \;\Leftrightarrow\; x \rho\, y$. Să se demonstreze că $\leq$ este bine definită şi că $(\widehat{M}, \leq)$ este mulţime ordonată.
iii. Aplicaţi construcţia de mai sus cazului: $(M, \rho) = (Z, |)$.

6. Mulţimea numerelor întregi este numărabilă.

Soluţie. Mulţimea $\mathbb{Z}$ poate fi scrisă sub forma unui şir: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, ...\}$, sau, echivalent, aplicaţia $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$,
$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{dacă} \quad n \text{ este par} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{dacă} \quad n \text{ este impar} \end{cases}$$
este bijectivă.

7. Mulţimea numerelor raţionale este numărabilă .

Soluţie. Mulţimea numerelor raţionale pozitive poate fi scrisă ca un şir:
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \ldots$$
Şirul de mai sus conţine la un anumit pas toate fracţiile pentru care suma dintre numărător şi numitor este aceeaşi.

8. Mulţimea $\mathcal{P}$ a numerelor prime este numărabilă.

   Soluţie. Cum $\mathcal{P} \subset \mathbb{N} \Longrightarrow \mathrm{Card}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Card}\mathbb{N}$

   Va fi suficient să arătăm că $\aleph_0 \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P})$, deci $\mathcal{P}$ este infinită.

   Presupunem că $\mathcal{P}$ este finită, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

   Considerăm $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

   $q > p_k, k = \overline{1,n} \Longrightarrow q$ nu aparţine mulţimii $\mathcal{P}$

   Presupunem q număr compus $\Longrightarrow \exists p_i | q \Longrightarrow p_i | p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, dar $p_i | p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \Longrightarrow p_i | 1$ contradicţie. Deci presupunerea făcută este falsă aşadar $\mathcal{P}$ este infinită.

9. Mulţimea numerelor reale cuprinse între 0 şi 1 nu este numărabilă.

   Soluţie. Fie $X = (0, 1)$. Vom scrie fiecare element al lui X sub forma unei fracţii zecimale infinite procedând în felul următor (simbolul lui König) :

   - sau numărul real se scrie în mod normal sub forma unei fracţii zecimale infinite

   $$\frac{1}{3} = 0,3333333\ldots$$
   $$\pi - 3 = 0,1415926\ldots$$
   $$\frac{\sqrt{2}}{10} = 0,141421$$

   şi îl vom păstra sub această formă ;

   - sau numărul real nu are decât un număr finit de zecimale

   $$\frac{1}{2} = 0,5$$
   $$\frac{7}{40} = 0,175$$

   şi în acest caz se înlocuieşte ultima zecimală prin numărul imediat inferior şi apoi se scrie o infinitate de 9, astfel :

   $$\frac{1}{2} = 0,499999\ldots$$
   $$\frac{7}{40} = 0,1799999\ldots$$

   S-a realizat astfel o corespondenţă biunivocă între elementele lui X şi toate simbolurile lui König de forma $0, a_1 a_2 a_3 \ldots, a_i$ fiind o cifră oarecare cuprinsă între 0 şi 9.

   Pentru a demonstra că mulţimea X nu este numărabilă vom raţiona prin reducere la absurd presupunând că toate elementele lui X pot fi scrise sub forma unui şir.

Primul element al lui X este $0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots$

Al doilea element al lui X este $0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots$

Al treilea element al lui X este $0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots$

....

Presupunerea că toate elementele lui X sunt în acest şir este falsă, deoarece există un simbol al lui König ce nu figureză aici şi anume

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_p \ldots,$$

unde $b_1 \neq a_1^1, b_2 \neq a_2^2, \ldots\ldots b_p \neq a_p^p$. Acest simbol reprezintă un număr real cuprins între 0 şi 1, deci va fi un element al lui X. Totuşi el este diferit de orice element din şirul de mai sus, deci b nu aparţine lui X. Ajungem astfel la o contradicţie ce ne conduce la a afirma că mulţimea X nu este numărabilă.

10. Punctele unui segment de dreaptă constituie o mulţime nenumărabilă

    Soluţie. Fie AB un astfel de segment. Alegem o axă $x'Ox$ astfel ca originea O să fie în A şi astfel ca vectorul său unitar să coincidă cu vectorul AB. Oricărui punct M al lui AB (punctele A şi B fiind excluse îi va corespunde abscisa lui M care va fi un număr cuprins între 0şi 1, deci un element al mulţimii $X = (0, 1)$ şi această corespondenţă este biunivocă. Mulţimea punctelor segmentului AB (A şi B fiind excluse) este astfel echipotentă cu mulţimea $(0, 1)$ care nu este numărabilă. Faptul că adăugăm extremităţile A şi B nu schimbă cu nimic concluzia.

18.2 Spaţiul $\mathbb{R}^n$

1. Să se calculeze normele vectorilor:

   a) $x = (-1, 3)$

   b) $y = (2, -1, 5)$

   c) $z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$

   d) $u = (0, 1, 0, -1, 0, -1)$

   Soluţie

   a) $\|x\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

   b) $\|y\| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

   c) $\|z\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{65}}{12}$

   d) $\|u\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

2. Să se calculeze produsul scalar $x \cdot y$ dacă:

   a) $x = (3, 4, 5, -4)$; $y = (3, 0, 3, 3)$

   b) $x = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$; $y = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

   c) $x = (1, 2, -3, 1, 4)$; $y = (1, 2, -1, 3, 4)$

   Soluţie

   a) $x \cdot y = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 12$

   b) $x \cdot y = -\frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{8}$

   c) $x \cdot y = 1 + 4 + 3 + 3 + 16 = 27$

3. Să se arate că pentru orice doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$ au loc relaţiile:

   a) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

   b) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y$

   c) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4x \cdot y$

   Soluţie

   a) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) + (x - y) \cdot (x - y) =$
   $= x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y + x \cdot x - 2x \cdot y + y \cdot y = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

   b) $\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$

   c) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) - (x - y) \cdot (x - y) =$
   $= x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y - x \cdot x + 2x \cdot y - y \cdot y = 4x \cdot y$

4. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptelor ce trec prin punctul x_0 şi au direcţia v, unde:

   a) $x_0 = (1, 3, -1)\,; \quad v = (-5, -2, 3)$

   b) $x_0 = (1, 2, -3, 1)\,; \quad v = (3, 4, 5, -4)$

   c) $x_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right); \quad v = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

   Soluţie

   Un punct oarecare de pe dreapta care trece prin x_0 şi are direcţia v este de forma: $x = x_0 + tv, \quad t \in \mathbb{R}$.

   a) $(x, y, z) = (1, 3, -1) + t(-5, -2, 3)$ sau $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 + 5t \\ u = 1 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{t}{3} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{t}{6} \\ z = \frac{1}{4} + \frac{t}{6} \\ u = -\frac{1}{4} - \frac{t}{3} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

5. Să se afle cosinusurile unghiurilor triunghiului de vârfuri:

$$A(2, -1, 1);\ B(1, -3, -5);\ C(3, -4, -4)$$

Soluţie $\overrightarrow{AB} = (1 - 2, -3 + 1, -5 - 1) = (-1, -2, -6)$,
$\overrightarrow{AC} = (3 - 2, -4 + 1, -4 - 1) = (1, -3, -5)$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{-1 + 6 + 30}{\sqrt{1+4+36}\sqrt{1+9+25}} = \frac{35}{\sqrt{41}\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{35}{41}}$$

$$\overrightarrow{BA} = (1, 2, 6);\ \overrightarrow{BC} = (2, -1, 1),\ \cos B = \frac{2 - 2 + 6}{\sqrt{1+4+36}\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{\frac{6}{41}}$$

$$\overrightarrow{CA} = (-1, 3, 5);\ \overrightarrow{CB} = (-2, 1, -1),\ \cos C = \frac{2 + 3 - 5}{\sqrt{1+9+25}\sqrt{4+1+1}} = 0$$

$\left(\hat{C} = 90^\circ\right)$

18.3 Elemente de topologie a spaţiului $\mathbb{R}^n$

1. Să se precizeze valoarea maximă a razei r a bilei deschise cu centrul în x_0 care este inclusă în mulţimea S, unde:

   a) $x_0 = (1, 2, -1, 3)$; S este bila deschisă cu centrul în $a = (0, 3, -2, 2)$ şi de rază 7.

   b) $x_0 = (1, 2, -1, 3)$; $S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, |x_i| \leq 5,\ i = \overline{1, 4}\right\}$

   c) $x_0 = \left(3, \frac{5}{2}\right)$; S este triunghiul (plin) de vârfuri $A(2, 0)$, $B(2, 2)$ şi $C(4, 4)$.

   Soluţie

   a) $S = B(a, 7) = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, x_1^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 + 2)^2 + (x_4 - 2)^2 < 49\right\}$
   $B(x_0, r) = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 + (x_4 - 3)^2 < r^2\right\}$
   $d(a, x_0) = \sqrt{1 + 1 + 1 + 1} = 2 < 7$, deci $x_0 \in S$.
   Dacă $x \in B(x_0, r)$, atunci $d(x, x_0) < r$. Pe de altă parte,

   $$d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a) < r + 2 < 7,$$

   de unde rezultă că $r < 5$, deci $\max\{r\,|B(x_0, r) \subset S\} = 5$.

b) S reprezintă un cub (în $\mathbb{R}^4$) cu centrul în origine şi de latură 10. Evident, x_0 este un punct interior lui S. Cea mai mică distanţă de la x_0 la feţele cubului este 2, deci $\max\{r\,|B(x_0,r)\subset S\}=2$.

c) Ecuaţiile laturilor triunghiului sunt:

$AB:\ x=2$; $BC:\ y=x$; $AC:\ y=2x-4$. Se observă că punctul $x_0=\left(3,\frac{5}{2}\right)$ se află la dreapta lui AB, sub BC şi deasupra lui AC, deci în interiorul triunghiului. Cea mai mică distanţă de la x_0 la laturile triunghiului este distanţa de la x_0 la AC, care este $\frac{1}{2\sqrt{5}}$, deci $\max\{r\,|B(x_0,r)\subset S\}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

2. Precizaţi frontiera ∂S, interiorul $\overset{\circ}{S}$, închiderea $\overline{S}$ şi exteriorul Ext S mulţimii S:

   a) $S=\{(x,y,z)\,|\,|x|<1,\quad |y|<1,\quad z\in\mathbb{R}\}$

   b) $S=\left\{(x,y,1)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$

   Soluţie

   a) $$\begin{aligned}\partial S=\ &\{(x,y,z)\,|\,|x|=1,\ |y|<1,\ z\in\mathbb{R}\}\cup\\ &\cup\{(x,y,z)\,|\,|x|<1,\ |y|=1,\ z\in\mathbb{R}\}\cup\\ &\cup\{(x,y,z)\,|\,|x|=1,\ |y|=1,\ z\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$
   $\overline{S}=\{(x,y,z)\,|\,|x|\le 1,\ |y|\le 1,\ z\in\mathbb{R}\}$
   $\overset{\circ}{S}=S$
   Ext $S=\{(x,y,z)\,|\,|x|>1,\ y,z\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,y,z)\,|\,|y|>1,\ x,z\in\mathbb{R}\}$

   b) $\partial S=S$; $\overline{S}=S$; $\overset{\circ}{S}=\emptyset$
   Ext $S=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2>1 \text{ sau } z\neq 1\right\}$

3. Precizaţi dacă mulţimile următoare sunt deschise, închise, nici deschise, nici închise:

   a) $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,|x_1|>0,\ x_2<1,\ x_3\neq -2\}$

   b) $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1=1,\ x_3\neq -4\}$

   c) $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1=1,\ -3\le x_2\le 1,\ x_4=-5\}$

   Soluţie

   a) Fie:
   $S_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,|x_1|>0\}$
   $S_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_2<1\}$
   $S_3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_3\neq -2\}$
   $S=S_1\cap S_2\cap S_3$. Cum S_1, S_2 şi S_3 sunt evident mulţimi deschise şi o intersecţie finită de mulţimi deschise este deschisă, rezultă că S este deschisă.

   b) Nici deschisă şi nici închisă.

c) Fie $(1, u_k, v_k, -5) \in S, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $-3 \leq u_k \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$şi $v_k \in \mathbb{R}$. Dacă $(1, u_k, v_k, -5) \xrightarrow{\mathbb{R}^4} (1, u, v, -5)$, atunci $-3 \leq u \leq 1$ şi $v \in \mathbb{R}$, deci $(1, u, v, -5) \in S$. Rezultă că S este o mulţime închisă.

4. Să se arate că bila închisă $\check{B}(a,r) = \{x \mid \|x-a\| \leq r\}$ este o mulţime închisă.

   Soluţie

   Vom arăta că mulţimea complementară $C\check{B}(a,r) = \{x \mid \|x-a\| > r\}$ e deschisă. Într-adevăr, fie $b \in C\check{B}(a,r)$ oarecare. Atunci $\|b-a\| > r$. Fie $0 < \varepsilon < \|b-a\| - r$ şi $x \in B(b,\varepsilon)$. Atunci $\|x-b\| < \varepsilon$ şi avem: $\|b-a\| \leq \|b-x\| + \|x-a\| < \varepsilon + \|x-a\| < \|b-a\| - r + \|x-a\|$, de unde rezultă că $\|x-a\| > r$. Aşadar, $B(b,\varepsilon) \subset C\check{B}(a,r)$, deci b este un punct interior.

5. Să se arate că închiderea bilei deschise coincide cu bila închisă, adică: $\overline{B(a,r)} = \overline{\{x \mid \|x-a\| < r\}} = \{x \mid \|x-a\| \leq r\} = \check{B}(a,r)$

   Soluţie

   Cum $B(a,r) \subset \check{B}(a,r)$ şi $\check{B}(a,r)$ este închisă, rezultă că $\overline{B(a,r)} \subset \check{B}(a,r)$. Rămâne să dovedim incluziunea inversă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că orice b cu proprietatea $\|b-a\| = r$ aparţine mulţimii $\overline{B(a,r)}$. Fie b un astfel de punct , fie $\{\varepsilon_n\}$ un şir de numere pozitive astfel încât $0 < \varepsilon_n < 1$, $\varepsilon_n \to 0$ şi fie $x_n = \varepsilon_n a + (1-\varepsilon_n) b$. Atunci $\|x_n - b\| = \varepsilon_n \|a-b\| = \varepsilon_n r \to 0$, de unde deducem că $x_n \to b$. Pe de altă parte, $\|x_n - a\| = (1-\varepsilon_n) \|b-a\| = (1-\varepsilon_n) r < r$, deci $x_n \in B(a,r)$. Cum $x_n \in B(a,r)$ şi $x_n \to b$, rezultă că $b \in \overline{B(a,r)}$.

6. Să se studieze dacă următoarele mulţimi din R^2 sunt deschise, respectiv închise. Pentru fiecare mulţime să se determine închiderea şi frontiera.

   a) $A = [0,3) \times (1,2]$;

   b) $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - y^2 < 1\}$.

   Soluţie. a) Mulţimea A este mărginită, nu este deschisă, nici închisă; $\overline{A} = [0,3] \times [1,2]$, $FrA = ([0,3] \times \{1,2\}) \cup (\{0,3\} \times [1,2])$.

   b) Mulţimea nu este mărginită, este deschisă, dar nu este închisă; $\overline{A} = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - y^2 \leq 1\}, FrA = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - y^2 = 1\}$.

7. Fie $A, B \subseteq R^n$ două submulţimi nevide. Să se arate că:

   a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

   b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

   Soluţie. a) Dacă $x \in \overline{A \cup B}$ atunci pentru orice vecinătate V a lui x avem $(A \cup B) \cap V \neq \emptyset$, sau echivalent $(A \cap V) \cup (B \cap V) \neq \emptyset$, de unde

$(A \cap V) \neq \emptyset$ sau $(B \cap V) \neq \emptyset$, adică $x \in \overline{A}$ sau $x \in \overline{B}$. In concluzie $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Incluziunea inversă rezultă din faptul că $A \subseteq A \cup B$ implică $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ şi analog $B \subseteq A \cup B$ implică $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

b) Se procedează similar. Să remarcăm că incluziunea inversă nu este în general adevărată. In acest sens considerăm mulţimile $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$.

18.4 Funcţii continue

1. Să se arate că funcţia:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie

În orice punct $(a, b) \neq (0, 0)$, funcţia este continuă, aşa cum rezultă cu uşurinţă din definiţia cu şiruri.

Pentru a dovedi continuitatea în $(0, 0)$, observăm că:

$\left|x^3\right| \leq \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$ şi $\left|y^3\right| \leq \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, de unde rezultă:

$$|f(x,y)| \leq \frac{2\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\,.$$

Dacă $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ atunci $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to 0$, deci:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Aşadar f este continuă şi în $(0, 0)$.

2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Spunem că f este continuă parţial în raport cu x (respectiv y) în punctul (a, b), dacă funcţia de o variabilă $x \to f(x, b)$ este continuă în a (respectiv funcţia $y \to f(a, y)$ este continuă în b).

Să se arate că funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nu este continuă în $(0, 0)$, dar este continuă parţial în $(0, 0)$, atât în raport cu x, cât şi în raport cu y.

Soluţie

Funcţia f nu este continuă în $(0, 0)$ deoarece nu există limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Într-adevăr, pentru şirul $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ rezultă $f(x_n', y_n') = \frac{1}{2}$, $\forall\, n$, deci $f\,(x_n', y_n') \to \frac{1}{2}$.

Pentru şirul $(x_n'', y_n'') = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ rezultă $f\,(x_n'', y_n'') = \frac{2}{5}$, $\forall\, n$, deci $f\,(x_n'', y_n'') \to \frac{2}{5}$.

Pe de alta parte, f este continuă parţial în raport cu x în origine, deoarece funcţia de o variabilă $x \to f(x,0) = 0\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este evident continuă în 0. Analog, funcţia de o variabilă $y \to f(0,y) = 0\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în 0, deci f este continuă parţial în raport cu y în origine.

3. O funcţie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *lipschitziană* pe A dacă există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \leq L \left|x' - x''\right|, \quad \forall\, x',\ x'' \in A$$

a) Să se arate că dacă f este lipschitziană pe A atunci f este uniform continuă pe A.

b) Să se arate că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ are derivata mărginită pe intervalul I, atunci f este uniform continuă pe I.

c) Să se arate că funcţia $f(x) = 2x + 3\sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}$, este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

d) Există funcţii uniform continue care nu sunt lipschitziene?

Soluţie

a) Fie $\varepsilon > 0$ oarecare şi fie $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$. Atunci, dacă $x',\ x'' \in A$ şi $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, rezultă $|f(x') - f(x'')| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$, deci f este uniform continuă pe A.

b) Afirmaţia rezultă din teorema lui Lagrange. Fie $M > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq M,\ \forall\ x \in I$. Pentru $\forall\ x',\ x'' \in I$, există ξ între x' şi x'' astfel încât

$$f(x') - f(x'') = f'(\xi)\left(x' - x''\right).$$

În continuare avem:

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \leq M\left|x' - x''\right|, \quad \forall\, x',\ x'' \in I,$$

deci f este lipschitziană pe I. Din **a)** deducem că f este uniform continuă pe I.

c) $f'(x) = 2 + 6\sin x \cos x,\ x \in \mathbb{R}$, deci $|f'(x)| \leq 8,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Afirmaţia rezultă acum din **b)**.

d) Fie funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}\,, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ 0\,, & \text{dacă } \ x = 0 \end{cases}$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, rezultă că f este continuă şi în 0, deci f este continuă pe mulţimea $[0,1]$. Cum $[0,1]$ este o mulţime compactă, rezultă că f este uniform continuă pe $[0,1]$.

Vom arăta că f nu este lipschitziană pe $[0,1]$, deci că $\forall\ L>0$, există $x'_L, x''_L \in [0,1]$ astfel încât $|f(x'_L)-f(x''_L)| > L\,|x'_L - x''_L|$.

Fie $k\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $4k+2>L$ şi fie $x'_L = \dfrac{1}{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$,

$x''_L = \dfrac{1}{(4k+3)\frac{\pi}{2}}$. Evident, $x'_L, x''_L \in [0,1]$ şi $|x'_L - x''_L| = \dfrac{4}{\pi(4k+1)(4k+3)}$. Pe de altă parte,

$$\left|f(x'_L)-f(x''_L)\right| = \left|x'_L\sin\frac{\pi}{2} - x''_L\sin\frac{3\pi}{2}\right| = x'_L + x''_L =$$

$$= \frac{4(4k+2)}{\pi(4k+1)(4k+3)} = (4k+2)\left|x'_L - x''_L\right| > L\left|x'_L - x''_L\right|.$$

4. Să se arate că funcţia

$$f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

nu este uniform continuă pe $(1,\infty)$.

Soluţie

Trebuie să arătăm că $\exists\ \varepsilon_0>0$ astfel încât $\forall\delta>0$, $\exists\ x'_\delta, x''_\delta\in(1,\infty)$ cu proprietatea că $|x'_\delta - x''_\delta|<\delta$ şi $|f(x'_\delta)-f(x''_\delta)|\ge\varepsilon_0$.

Evident, $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x-1}$, $x\in(1,\infty)$.

Fie $\varepsilon_0=1$, $\delta>0$ oarecare şi $n_\delta\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{n_\delta(n_\delta+1)}<\delta$. Alegem $x'_\delta = 1+\dfrac{1}{n_\delta+1}$ şi $x''_\delta = 1+\dfrac{1}{n_\delta}$ şi observăm că $|x'_\delta - x''_\delta|<\delta$, iar $|f(x'_\delta)-f(x''_\delta)| = |x'_\delta - x''_\delta + 2| = 2-\dfrac{1}{n_\delta(n_\delta+1)} > 1 = \varepsilon_0$, deci f nu este uniform continuă pe $(1,\infty)$.

5. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$ nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie

Fie $\varepsilon_0=1$, $\delta>0$ arbitrar şi $n_\delta\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{\sqrt{n_\delta}+\sqrt{n_\delta+1}}<\dfrac{\delta}{2}$.

Dacă alegem $(x'_\delta, y'_\delta) = \left(\sqrt{n_\delta+1}, \sqrt{n_\delta+1}\right)$ şi $(x''_\delta, y''_\delta) = \left(\sqrt{n_\delta}, \sqrt{n_\delta}\right)$, atunci $|x'_\delta - x''_\delta| = |y'_\delta - y''_\delta| = \sqrt{n_\delta+1} - \sqrt{n_\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{n_\delta+1}+\sqrt{n_\delta}} < \dfrac{\delta}{2}$ şi $|f(x'_\delta, y'_\delta) - f(x''_\delta, y''_\delta)| = 2 > \varepsilon_0 = 1$.

Aşadar, $\exists\, \varepsilon_0 = 1$ astfel încât $\forall \delta > 0$, $\exists\, (x'_\delta, y'_\delta) \in \mathbb{R}^2$, $(x''_\delta, y''_\delta) \in \mathbb{R}^2$ cu $d\left((x'_\delta, y'_\delta), (x''_\delta, y''_\delta)\right) < \delta$ şi $|f(x'_\delta, y'_\delta) - f(x''_\delta, y''_\delta)| > \varepsilon_0 = 1$, deci f nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}^2$.

6. Fie $f, g : R^n \to R^m$ două funcţii continue. Să se arate că mulţimea $A = \{x \in R^n : f(x) = g(x)\}$ este închisă în R^n.

   Soluţie. Fie $a \in \overline{A}$ şi $(x_n) \subset R^n$ astfel încât $x_n \to a$. Cum f, g sunt funcţii continue vom avea $f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(a)$ şi cum $f(x_n) = g(x_n)$ va rezulta că $f(a) = g(a)$, deci $a \in A$, adică mulţimea A este închisă.

7. Fie $A \subseteq R^n$ şi $f : A \to R$ o funcţie continuă în punctul $a \in A$, iar $f(a) > 0$. Să se arate că există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(x) > 0$, pentru orice $x \in V \cap A$.

   Soluţie. Fie $r > 0$ astfel încât $0 < r < f(a)$. Cum f este continuă în punctul a există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem $d((f(x), f(a)) = |f(x) - f(a)| < r$, de unde rezultă că $f(x) > f(a) - r > 0$, pentru orice $x \in B(a, \delta) \cap A$.

8. Fie $f, g : R^n \to R$ două funcţii continue. Să se arate că mulţimea $A = \{x \in R^n : f(x) < g(x)\}$ este deschisă în R^n.

   Soluţie. Fie $a \in A$. Folosind problema 2 există $\delta > 0$ astfel încât $f(x) < g(x)$, pentru orice $x \in B(a, \delta)$, deci $B(a, \delta) \subset A$, adică A este deschisă.

9. Să se arate că funcţia $f : R^n \to R$, $f(x) = \|x - a\|$, unde $a \in R^n$, este uniform continuă.

   Soluţie. Rezultă din inegalitatea $\big|\|x-a\| - \|y-a\|\big| \leq \|x - y\|$, pentru oricare $x, y \in R^n$.

10. Să se arate că funcţia $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to R, f(x, y) = \dfrac{x+1}{y}$ nu este uniform continuă.

    Soluţie. Considerăm şirurile $(x_n, y_n) = \left(1, \dfrac{1}{n}\right)$, $(x'_n, y'_n) = \left(1, \dfrac{2}{n}\right)$ şi evident avem $\|(x_n, y_n) - (x'_n, y'_n)\| = \dfrac{1}{n} \to 0$, pentru $n \to \infty$, iar

$|f(x_n, y_n) - f(x_n', y_n')| = n \to \infty$. Folosind definiţia rezultă imediat că f nu este uniform continuă.

18.5 Derivate parţiale, diferenţială

1. Fie funcţia:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^2y + xy^2\right)\sin(x-y)}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Soluţie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(2xy + y^2\right)\sin(x-y) + \left(x^2y + xy^2\right)\cos(x-y)}{x^2+y^2} -$$
$$-\frac{2x\left(x^2y + xy^2\right)\sin(x-y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \text{ dacă } (x,y) \neq (0,0);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2 \sin y}{y^3} = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(x^2 + 2xy\right)\sin(x-y) - \left(x^2y + xy^2\right)\cos(x-y)}{x^2+y^2}$$
$$-\frac{2y\left(x^2y + xy^2\right)\sin(x-y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \text{ dacă } (x,y) \neq (0,0);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y-0} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{x^3} = 1.$$

Rezultă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

2. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale următoarelor funcţii:

a) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z, \quad x > 0,\ y > 0$

b) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}, \quad x > 0,\ z \neq 0$

c) $f(x,y,z) = x^{y^z}, \quad x > 0,\ y > 0$

Soluţie

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = z\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = z\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{z} \cdot \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \dfrac{1}{z} \cdot \ln x$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \left(-\dfrac{y}{z^2}\right) \cdot \ln x$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z-1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} \cdot zy^{z-1} \cdot \ln x$; $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} \cdot y^z \cdot \ln y \cdot \ln x$

3. Fie funcţia $f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a. Să se arate că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2.

b. Să se arate f are derivate parţiale mixte de ordinul al doilea în orice punct şi să se calculeze $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în origine; este funcţia f de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R^2 ?

Soluţie

a. Derivatele parţiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4y^2x^3}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se demonstrează că $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue, deci f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2.

b. Evident, funcţia are derivate parţiale de ordinul al doilea în orice punct $(x,y) \neq (0,0)$; studiem existenţa derivatelor mixte în origine (cu definiţia):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin 1}{x} = \sin 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{y \sin(-1)}{y} = -\sin 1.$$

Funcţia nu este de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R^2; dacă ar fi fost, atunci, conform teoremei de simetrie a lui Schwartz, cele două derivate mixte de ordinul al doilea ar fi trebuit să fie egale.

4. Fie funcţia: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a. Să se arate că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2.

b. Să se arate f are derivate parţiale mixte de ordinul al doilea în orice punct şi să se calculeze $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în origine; este funcţia f

de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R^2 ?

Soluţie

Derivatele parţiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea în origine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)}{y} = 1,$$

deci funcţia nu este de clasă $C^2(R^2)$.

5. Să se studieze existenţa derivatelor parţiale şi a diferenţialei în origine pentru funcţia: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - yx^2}{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Soluţie

   Funcţia are derivate parţiale în orice punct, dar nu este diferenţiabilă în origine.

6. Fie mulţimea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq -2\right\}$ şi funcţiile

$$f : A \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = \left(\sqrt{x},\ \sqrt{x^2+3y^2},\ \sqrt{y+2}\right),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g(u,v,w) = \left(u^2+v^2+2w^2,\ u^2-v^2\right),$$

$$h = g \circ f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Notăm cu $a = (1,-1) \in A$ şi cu $b = f(a) = (1,2,1)$.

Să se verifice că $h'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$ şi $dh(a) = dg(b) \circ df(a)$

Soluţie

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y+2}} \end{pmatrix} \text{ şi } f'(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$g'(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2u & 2v & 4w \\ 2u & -2v & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } g'(1,2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(x,y) = g\left(f(x,y)\right) = g\left(\sqrt{x},\ \sqrt{x^2+3y^2},\ \sqrt{y+2}\right) =$$
$$= \left(x + x^2 + 3y^2 + 2y + 4,\ x - x^2 - 3y^2\right)$$

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2x & 6y+2 \\ 1-2x & -6y \end{pmatrix}, h'(1,-1) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte avem:

$$g'(1,2,1)\cdot f'(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

În continuare avem:

$$df(1,-1) = \left(\frac{1}{2}dx,\ \frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy,\ \frac{1}{2}dy\right)$$

$$dg(1,2,1) = (2du + 4dv + 4dw,\ 2du - 4dv)$$

$$dh(1,-1) = (3dx - 4dy,\ -dx + 6dy)$$

$$dg(1,2,1)\circ df(1,-1) =$$
$$\left(2\cdot\frac{1}{2}dx + 4\left(\frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy\right) + 4\cdot\frac{1}{2}dy,\ 2\cdot\frac{1}{2}dx - 4\left(\frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy\right)\right) =$$
$$(3dx - 4dy,\ -dx + 6dy)$$

7. Fie funcţia $f : R^2 \to R, f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^6+y^2}$ dacă $(x,y)\neq(0,0)$ şi $f(0,0)=0$. Să se arate că f nu este continuă în punctul $(0,0)$ dar este derivabilă în $(0,0)$ după orice versor $s = (s_1, s_2) \in R^2$.

Solutie. Considerăm şirurile $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0), (x_n^{'}, y_n^{'}) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, iar $f(x_n, y_n) \to 0, f(x_n^{'}, y_n^{'}) \to 1$, deci f nu este continuă în punctul $(0,0)$. Evident $\frac{df}{ds}(0,0) = 0$.

8. Fie funcţia $f : R^2 \to R, f(x,y) = \cos(2x+3y)$. Să se calculeze $\frac{df}{ds}(\frac{\pi}{4},0)$, unde $s=(s_1,s_2)\in R^2$ este un versor.
Soluţie. $\frac{df}{ds}(\frac{\pi}{4},0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f((\frac{\pi}{4},0)+t(s_1,s_2))-f(\frac{\pi}{4},0)}{t} =$
$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+2ts_1+3ts_2)}{t} = -(2s_1+3s_2)$.

9. Fie $f : R^3 \mapsto R$; $f(x,y,z) = x^2+yz-xy$ şi $a=(1,1,2)$. Să se determine versorul s ştiind că $\frac{df}{ds}(a)$ este maxim.
Soluţie
$\frac{df}{ds}(a) = s\cdot \mathrm{grad}_a f = \parallel s \parallel \cdot \parallel \mathrm{grad}_a f \parallel \cdot \cos(\widehat{s, \mathrm{grad}_a f}) =$

$$=\parallel \mathrm{grad}_a f \parallel \cdot \cos(\widehat{s, \mathrm{grad}_a f}).$$

Deci maximul se obţine atunci când s are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\mathrm{grad}_a f$. Rezultă : $\mathrm{grad}_a f = (1,1,1) \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

10. Să se calculeze laplacianul următoarelor funcţii:
a. $f : R^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto R, f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

b. $k : R^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mapsto R,\ k(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Soluţie
Laplacianul unei funcţii f de n variabile, este, prin defini'tie:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

O funcţie al cărei laplacian este nul se numeşte funcţie armonică.
a. Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

şi deci $\Delta f = 0$.

b. Derivatele parţiale:

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}},$$

şi deci $\Delta k = 0$.

11. Fie $a \in R$ şi fie g şi h două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe R. Să se demonstreze că $f(x,y) = g(x-ay) + h(x+ay)$ verifică ecuaţia coardei vibrante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Soluţie Calcul direct.

12. Să se afle $f \in \mathcal{C}^2(R)$ ştiind că funcţia $u(x,y) = f(x^2-y^2)$ este armonică pe R^2.
Soluţie
O funcţie este armonică dacă satisface relaţia $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2-y^2)\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2-y^2) + 4x^2 f''(x^2-y^2).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2yf'(x^2-y^2)\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2f'(x^2-y^2) + 4y^2 f''(x^2-y^2)$$

Inlocuind în $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, rezultă $4(x^2+y^2)f''(x^2-y^2) = 0$; în final se obţine $f(t) = at + b$, cu $a, b \in R$ arbitrar fixate.

13. Să se afle $f \in \mathcal{C}^2(R)$ ştiind că funcţia $v(x,y) = f(\frac{y}{x})$ este armonică.
Soluţie

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})\ ;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})\ ;\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x}).$$

Inlocuind în ecuaţia dată, rezultă :

$$\frac{x^2+y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x}) + \frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x}) = 0.$$

Notând $t = \frac{y}{x}$ se obţine (după calcule):

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{-2t}{t^2+1},$$

şi deci

$$f(t) = a \cdot \operatorname{arctg}(t) + b$$

cu $a, b \in R$ arbitrar fixate.

14. Să se demonstreze că laplacianul în coordonate polare este:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

Soluţie
Fie $f \in C^2(R^2), x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\varphi.$$

Rezolvând sistemul, (în necunoscutele $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$), rezultă :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\sin^2\varphi}{\rho} +$$
$$+2\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\cos^2\varphi}{\rho} -$$
$$-\,2\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}.$$

'In concluzie:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

15. Fie ecuaţia diferenţială $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$. Ce devine ecuaţia dacă se face schimbarea de variabile $(x,y)\mapsto(t,y)$, unde $x=e^t$?
Soluţie
Calculăm $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{d^2y}{dx^2}$ în funcţie de $\frac{dy}{dt}$ şi $\frac{d^2y}{dt^2}$. Din $x=e^t$, rezultă $t=\ln x$ şi deci $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$; rezultă :
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$
Ecuaţia devine: $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2y=0.$

16. **Operatori diferenţiali.** Fie $\overline{V}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ un câmp de vectori de clasă $\mathcal{C}^2$ pe un deschis $U\subseteq R^3$ şi $f\in\mathcal{C}^2(U)$ (câmp scalar). Operatorii diferenţiali de ordinul întâi sunt gradientul, divergenţa şi rotorul, definiţi pentru orice $a\in U$ astfel:
$$(\text{grad}f)(a)=(\nabla f)(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)\overline{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(a)\overline{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(a)\overline{k}.$$
$$(\text{div}\overline{V})(a)=(\nabla\overline{V})(a)=\frac{\partial P}{\partial x}(a)+\frac{\partial Q}{\partial y}(a)+\frac{\partial R}{\partial z}(a).$$
$$(\text{rot}\overline{V})(a)=(\nabla\times\overline{V})(a)=$$
$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}(a)-\frac{\partial Q}{\partial z}(a)\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}(a)-\frac{\partial R}{\partial x}(a)\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(a)-\frac{\partial P}{\partial y}(a)\right)\overline{k}.$$
In cele ce urmează vom nota cu $\overline{r}=(x,y,z)$ vectorul de poziţie şi cu $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ norma sa. Evident, $\overline{r}$ este un câmp vectorial, iar r este un câmp scalar.
Pentru orice câmpuri vectoriale $\overline{V}$ şi $\overline{W}$ şi orice câmpuri scalare f şi g de clasă C^2, au loc relaţiile:
a. $\text{grad}(fg)=f\text{grad}g+g\text{grad}f.$
b. $\text{div}(f\overline{V})=f\text{div}\overline{V}+\overline{V}\text{grad}f.$
c. $\text{div}(\overline{V}\times\overline{W})=\overline{W}\text{rot}\overline{V}-\overline{V}\text{rot}\overline{W}.$
d. $\text{rot}(f\overline{V})=f\text{rot}\overline{V}-\overline{V}\times\text{grad}f.$
e. $\text{grad}(\overline{V}\,\overline{W})=\overline{W}\times\text{rot}\overline{V}+\overline{V}\text{rot}\overline{W}+\dfrac{d\overline{V}}{d\overline{\overline{W}}}+\dfrac{\overline{W}}{d\overline{\overline{V}}},$
unde, $\dfrac{d\overline{V}}{d\overline{\overline{W}}}$ este derivata după direcţia $\overline{W}$ a lui $\overline{V}$.
f. $\text{rot}(\overline{V}\times\overline{W})=\overline{V}\text{div}\overline{W}-\overline{W}\text{div}\overline{V}+\dfrac{d\overline{V}}{d\overline{\overline{W}}}-\dfrac{d\overline{W}}{d\overline{\overline{V}}}.$

g. $\dfrac{df}{d\overline{a}} = \overline{a}\text{grad}f,\ \text{grad}(\overline{a}\,\overline{r}) = \overline{a},$ pentru orice vector constant $\overline{a}$.
h. $\text{grad}r^{\alpha} = \alpha r^{\alpha-2}\overline{r},\ \forall\alpha \in R.$
i. $\text{rot}(\text{grad}f) = \overline{0}.$
j. $\text{div}(\text{rot}\overline{V}) = 0.$
k. $\text{div}(\text{grad}f) = \Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$

Soluţie
Calcul direct.

17. Să se arate că ecuaţia:

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} - 2\text{arctg}\frac{y}{x} = 0$$

defineşte intr-o vecinătate a punctului $(1,0)$ o funcţie implicită $y = f(x)$. Să se calculeze $f'(1)$ şi $f''(1)$.

Soluţie

Dacă notăm $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - 2\text{arctg}\dfrac{y}{x}$, atunci

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{y-2x}{x^2+y^2}$.

Verificăm condiţiile teoremei funcţiilor implicite:

$$F(1,0) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -2 \neq 0$$

Din teorema funcţiilor implicite rezultă că există o vecinătate deschisă U a punctului $a = 1$, o vecinătate deschisă V a punctului $b = 0$ şi o funcţie implicită unică $f : U \to V$ cu proprietăţile:

$f(1) = 0$

$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall\, x \in U$

$F \in C^{\infty}(U)$ şi $f'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} = \dfrac{x+2f(x)}{2x-f(x)},\ \forall x \in U.$

În particular avem $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Derivând încă o dată, obţinem:

$f''(x) = -\dfrac{(1+2f'(x))(2x-f(x)) - (x+2f(x))(2-f'(x))}{(2x-f(x))^2}$, deci

$f''(1) = \dfrac{5}{8}$.

Pentru calculul derivatelor f' şi f'' putem proceda şi în modul următor: derivăm succesiv identitatea $F\left(x, f(x)\right) = 0, \quad \forall\, x \in U$, adică derivăm identitatea

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + f^2(x)\right) - 2\mathrm{arctg}\frac{f(x)}{x} = 0$$

şi obţinem:
$x + 2f(x) + f'(x)\left(f(x) - 2x\right) = 0$ şi
$1 + 2f'(x) + f''(x)\left(f(x) - 2x\right) + f'(x)\left(f'(x) - 2\right) = 0$
Pentru $x = 1$ obţinem $1 - 2f'(1) = 0$, deci $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, iar din a doua relaţie,
$1 + 2\cdot\dfrac{1}{2} + f''(1)\,(-2) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 2\right) = 0$, de unde deducem că $f''(1) = \dfrac{5}{8}$.

18. Să se arate că sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 9 & = & 0 \\ x^3 - y^3 + z^3 - 3z & = & 0 \end{cases}$$

defineşte într-o vecinătate a punctului $\left(3, 3, -\sqrt{3}\right)$ funcţiile implicite $y = f(x),\ z = g(x)$. Să se calculeze $f'(3)$ şi $g'(3)$.

Soluţie

Notăm cu

$$\begin{array}{rcl} F(x,y,z) & = & x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 9 \\ G(x,y,z) & = & x^3 - y^3 + z^3 - 3z \end{array}$$

Constatăm că $F\left(3, 3, -\sqrt{3}\right) = 0, \quad G\left(3, 3, -\sqrt{3}\right) = 0.$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -3y^2 & 3z^2 - 3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\left(3, 3, -\sqrt{3}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -2\sqrt{3} \\ -27 & 6 \end{vmatrix} = 18(2 - 3\sqrt{3}) \neq 0.$$

Din teorema funcţiilor implicite rezultă că există o vecinătate deschisă U a punctului $a = 3$, o vecinătate deschisă V a punctului $b = 3$, o vecinătate deschisă W a punctului $c = -\sqrt{3}$ şi două funcţii implicite unice:

$$f : U \to V\ ; \quad g : U \to W$$

cu proprietăţile:

a) $f(3) = 3\ , \quad g(3) = -\sqrt{3}$

b) $\begin{cases} F\left(x, f(x), g(x)\right) = 0 \\ G\left(x, f(x), g(x)\right) = 0 \end{cases}$, $\forall x \in U$, adică
$\begin{cases} x^2 + f^2(x) + g^2(x) - 4x - 9 &= 0 \\ x^3 - f^3(x) + g^3(x) - 3g(x) &= 0 \end{cases}, \forall x \in U$
Derivând identităţile de mai sus, obţinem

$$\begin{cases} 2x + 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) - 4 &= 0 \\ 3x^2 - 3f^2(x)f'(x) + 3g^2(x)g'(x) - 3g'(x) &= 0 \end{cases}$$

Pentru $x = 3$ obţinem

$$\begin{cases} 6 + 6f'(3) - 2\sqrt{3}g'(3) - 4 &= 0 \\ 27 - 27f'(3) + 9g'(3) - 3g'(3) &= 0 \end{cases}$$

şi, mai departe,

$$\begin{cases} 3f'(3) - \sqrt{3}g'(3) &= -1 \\ 9f'(3) - 2g'(3) &= 9 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obţinem:

$$f'(3) = \frac{2 + 9\sqrt{3}}{3(3\sqrt{3} - 2)}, \quad g'(3) = \frac{12}{3\sqrt{3} - 2}$$

19. Să se arate că ecuaţia $x^3 - y^3 + x + y = 10$ defineşte funcţia y pe o vecinătate a punctului $(2, 1)$. Să se calculeze $y'(2), y''(2)$.

Soluţie. Ecuaţia este de forma $f(x, y) = 0$, unde $f : R^2 \to R, f(x, y) = x^3 - y^3 + x + y - 10$. Evident $f(2, 1) = 0, f \in C^1(R^2), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 + 1$, de unde $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -2 \neq 0$, deci ipotezele teoremei funcţiilor implicite sunt îndeplinite. Conform teoremei ecuaţia $f(x, y) = 0$ defineşte funcţia y pe o vecinătate a punctului $(2, 1)$, adică există o mulţime deschisă $A \subseteq R, 2 \in A$, o mulţime deschisă $B \subseteq R, 1 \in B$ şi o unică funcţie $y : A \to B$, de clasă C^1, cu valorile $y = y(x)$ astfel încât $y(2) = 1$ şi $f(x, y(x)) = 0, (\forall)x \in A$, adică $x^3 - y^3(x) + x + y(x) = 10, (\forall)x \in A$. Derivând în raport cu x obţinem

$$3x^2 - 3y^2(x)y'(x) + 1 + y'(x) = 0, (\forall)x \in A. \quad (1)$$

Pentru $x = 2$ avem $y(2) = 1$ şi atunci $12 - 3y'(2) + 1 + y'(2) = 0$, de unde $y'(2) = \frac{13}{2}$. Derivând din nou în raport cu x în relaţia (1) obţinem

$$6x - 6y(x)(y')^2(x) - 3y^2(x)y''(x) + y''(x) = 0, (\forall)x \in A.$$

$x = 2$ vom obţine $y''(2) = -\frac{483}{4}$.

18.6 Extremele funcţiilor, formule Taylor

1. Folosind formula lui Taylor cu restul Lagrange de ordinul 2, să se găsească o valoare aproximativă pentru $\sqrt[4]{260}$ şi să se precizeze eroarea.

   Soluţie

   Observăm că $256 = 4^4$ este cel mai apropiat număr de 260 de forma n^4.

   Scriind formula lui Taylor pentru funcţia $f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x > 0$, în jurul punctului $a = 256$, obţinem:

$$f(260) = f(256) + \frac{260-256}{1!} f'(256) + \frac{(260-256)^2}{2!} f''(256) +$$

$$+ \frac{(260-256)^3}{3!} f'''(\xi),$$

   unde $256 < \xi < 260$.

   Efectuând calculele, rezultă:

$$f(256) = 4; f'(256) = \frac{1}{4}(256)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4^4}$$

$$f''(256) = -\frac{3}{4^2}(256)^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4^9}$$

$$f'''(256) = \frac{21}{4^3}(256)^{-\frac{11}{4}} = \frac{21}{4^{14}} > f'''(\xi)$$

   Aşadar, avem:

$$f(260) = 4 + \frac{1}{4^3} - \frac{3}{2 \cdot 4^7} + \frac{4^3}{3!} f'''(\xi).$$

   Valoarea aproximativă căutată este $4 + \frac{1}{4^3} - \frac{3}{2 \cdot 4^7}$, iar eroarea este

$$\varepsilon = \frac{4^3}{3!} f'''(\xi) < \frac{4^3}{3!} f'''(256) = \frac{7}{2 \cdot 4^{11}} < \frac{1}{10^6}.$$

2. Să se scrie explicit formula lui Taylor cu restul de ordinul 1 pentru funcţia $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$ în jurul punctului $(1,1)$.

   Soluţie

   Formula cerută este:

$$f(x,y) = f(1,1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)(y-1)^2\right]$$

unde (ξ,η) este un punct interior pe segmentul de dreaptă de capete $(1,1)$ respectiv (x,y). Făcând calculele, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2};\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(2+4x^2\right)e^{x^2-y^2};\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4xye^{x^2-y^2};\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(4y^2-2\right)e^{x^2-y^2}.$$

Înlocuind în formula de mai sus, rezultă:

$$e^{x^2-y^2}=1+\left[2\left(x-1\right)-2\left(y-1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\left(2+4\xi^2\right)\left(x-1\right)^2-8\xi\eta\left(x-1\right)\left(y-1\right)+\left(4\eta^2-2\right)\left(y-1\right)^2\right]e^{\xi^2-\eta^2}$$

3. Fie funcţia $f:D\subset R^2\to R$, $f(x,y)=\text{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$. Să se aproximeze funcţia f printr-un polinom de grad doi în vecinătatea punctului $(1,-1)$.

   Soluţie. Din formula lui Taylor avem aproximarea
   $f(x,y)\simeq f(1,-1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)(y+1)+$
   $+\frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,-1)(x-1)(y+1)+$
   $+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)(y+1)^2\big]$.

   Cum $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{-2y}{(1+y^2)^2}$ rezultă că funcţia f se aproximează în vecinătatea punctului $(1,-1)$ prin polinomul

   $$P=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y+1)+\frac{1}{2}[\frac{-1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y+1)^2]=\frac{1}{4}(y^2-x^2+4x+4y).$$

4. Să se studieze extremele locale ale funcţiei $f:D\subset R^2\to R$,
   $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y+3$.

   Soluţie. Determinăm mai întâi punctele critice. Rezolvăm sistemul: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, sau echivalent $2x+y-\dfrac{4}{x}=0, x+2y-\dfrac{10}{y}=0$, cu soluţia $(x,y)=(1,2)$, care este punct critic. Vom calcula derivatele parţiale de ordinul doi: $r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2+\dfrac{4}{x^2}, s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$, $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2+\dfrac{10}{y^2}$. Atunci $r_0=r(2,1)=6, s_0=s(2,1)=1, t_0=t(2,1)=\frac{9}{2}$, de unde $r_0t_0-s_0^2=26>0$, şi cum $r_0>0$ rezultă că punctul $(2,1)$ este punct de minim local.

5. Să se afle punctele de extrem local ale funcţiei:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 21xy + 36x + 36y$$

Soluţie

Pentru început, aflăm punctele critice rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 21y + 36 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 21x + 36 = 0 \end{cases}$$

Punctele critice sunt $(-4,-4)$ şi $(-3,-3)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 21; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$d^2 f(-4,-4) = -24dx^2 + 42dxdy - 24dy^2$$

$$a_{11} = -24; \quad a_{12} = 21: \quad a_{22} = -24$$

$$\Delta_1 = -24 < 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} -24 & 21 \\ 21 & -24 \end{vmatrix} = 135 > 0$$

Deci forma pătratică $d^2 f(-4,-4)$ este negativ definită, de unde rezultă că $(-4,-4)$ este un punct de maxim local.

$$d^2 f(-3,-3) = -18dx^2 + 42dxdy - 18dy^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -18 & 21 \\ 21 & -18 \end{vmatrix} = -117 < 0$$

Deoarece $d^2 f(-3,-3)$ este alternantă, rezultă că punctul $(-3,-3)$ nu este punct de extrem local.

6. **Metoda celor mai mici pătrate**
Presupunem că pentru o funcţie $f : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ valorile în punctele (distincte) $x_0, x_1, ..., x_p$ sunt cunoscute:

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1, ..., f(x_p) = y_p$$

In general, punctele $M_i(x_i, y_i)$ nu sunt coliniare, ceea ce înseamnă că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $y_i - ax_i - b = 0, \ \forall i = 0, 1, ..., p$. Intr-adevăr, căutăm $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât suma pătratelor

$$\sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b)^2$$

să fie cât mai mic posibilă. Mai precis, considerăm funcţia

$$E : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \ E(a, b) = \sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b)^2$$

Problema este de a găsi punctele de minim ale funcţiei E. Folosind algoritmul de mai sus, rezolvăm mai întâi sistemul: $\dfrac{\partial E}{\partial a} = 0, \ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 0$; sistemul liniar:

$$\sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \ \sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b) = 0$$

are o unică soluţie (a_0, b_0). Acum calculăm

$$r = \frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\sum_{i=0}^{p} x_i^2, \ \ s = \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=0}^{p} x_i, \ \ t = \frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = 2(p+1)$$

Folosind inegalitatea lui Schwartz se poate verifica $rt - s^2 > 0$ şi $r > 0$, deci (a_0, b_0) este un punct de minim pentru E. Dreapta $y = a_0 x + b_0$ se numeşte ***dreapta de regresie*** a punctelor $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_p, y_p)$.

7. Să se determine extremele funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^3 + y^3 - 2xy = 0$.
   Soluţie
   Fie $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Funcţia $y = y(x)$ este definită în vecinătatea punctelor pentru care $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, adică $3y^2 - 2x \neq 0$. In această ipoteză, se determină punctele critice ale funcţiei y:

$$3x^2 + 3y^2 y' - 2y - 2xy' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}.$$

   Punctele critice sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} y' &= 0 \\ F &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 3x^2 &= 0 \\ x^3 + y^3 - 2xy &= 0 \\ 3y^2 - 2x &\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y &= \frac{3x^2}{2} \\ x^3\left(27x^3-16\right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &\neq 0 \end{cases}.$$

Unica soluţie este $(x, y) = \left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$. Pentru a decide dacă $x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ este punct de extrem local pentru y, vom calcula $y''\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$:

$$6x + 6y\left(y'\right)^2 + 3y^2y' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0, \Rightarrow y''(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}) = -3 < 0,$$

deci $x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ este maxim local pentru y şi $y(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}) = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

8. Să se determine extremele funcţiei $z = z(x, y)$, definite implicit de ecuaţia $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$.

Soluţie

Fie $F(x, y, z) = z^3+z+20(x^2+y^2)-8(xy+x+y)$; condiţia de existenţă a funcţiei z este $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, adic'a $3z^2 + 1 \neq 0$. Evident, condiţia este îndeplinită pentru orice $x, y, z \in R$. Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui z:

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + 40x - 8(y+1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8(y+1) - 40x}{3z^2+1}.$$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} + 40y - 8(x+1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{8(x+1) - 40y}{3z^2+1}.$$

Punctele critice ale funcţiei z sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ F(x,y,z) &= 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{8(y+1)-40x}{3z^2+1} &= 0 \\ \frac{8(x+1)-40y}{3z^2+1} &= 0 \\ z^3 + z + 20(x^2+y^2) - 8(xy+x+y) &= 0 \end{cases}$$

Unica soluţie a sistemului este $(x, y, z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$. Pentru a decide dacă el este punct de extrem local, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei z.

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 40 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{40}{3z^2+1}.$$

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 40 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{40}{3z^2+1}.$$

$$6z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 8 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8}{3z^2+1}.$$

Rezultă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 2,$$

deci în punctul $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, funcţia z are un maxim local.

9. Fie $a \in R$, $a \neq 0$; să se determine extremele locale ale funcţiei $z = z(x, y)$ definite implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$.
Soluţie
Fie $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2 + x^2 + z^2$; Condiţia de existenţă a funcţiei z este $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, adică $z \neq 0$. In această ipoteză, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei z:

$$2(x^2 + y^2 + z^2)\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}.$$

$$2(x^2 + y^2 + z^2)\left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

de unde rezultă $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y(x^2 + y^2 + z^2)}{z(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1)}$.

Sistemul $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial z}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} & = & 0 \\ F(x, y, z) & = & 0 \end{array}\right.$ are soluţiile

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(0, 0, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}}\right) \text{ şi}$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(0, 0, -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}}\right).$$

Se observă că este verificată condiţia $z \neq 0$. Derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (x^2 + y^2 + z^2)\left(2 + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2 + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{3z^2+y^2+z^2+1}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.

$$4y^2 + (x^2+y^2+z^2)\left(2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{x^2+3y^2+z^2}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.

$$\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+$$

$$+(x^2+y^2+z^2)\left(2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x}\partial y\right)+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{2xy}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.
Calculând derivatele parţiale de ordinul al doilea în punctul critic $(0,0)$, rezultă :

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{z},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0) = 0,\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{z}{z^2+1}.$$

Deoarece $rt - s^2 = \frac{1}{z^2+1} > 0$, ('si pentru z_1 şi pentru z_2), rezultă că atât z_1 cât şi z_2 au extreme locale în $(0,0)$. Funcţia z_1 satisface condiţia $r < 0$, deci are un maxim local în $(0,0)$, iar valoarea ei în acest punct este

$$z_1(0,0) = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}}.$$

Funcţia z_2 satisface condiţia $r > 0$, deci are un minim local în $(0,0)$, iar valoarea ei în acest punct este

$$z_2(0,0) = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}}.$$

10. Să se determine extremele locale ale funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^3+y^3-3x^2y-3=0$.
Soluţie
Fie $F(x,y) = x^3+y^3-3x^2y-3$. Condiţia de existenţă pentru y este $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, adică $3y^2-3x^2 \neq 0$. In această ipoteză, se calculează y':

$$3x^2+3y^2y'-6xy-3x^2y'=0 \Rightarrow y'(x) = \frac{2xy-x^2}{y^2-x^2},$$

deci punctele critice ale funcţiei y sunt

$$x_1 = 0,\ y_1(0) = \sqrt[3]{3},\ x_2 = -2,\ y_2(-2) = -1.$$

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2y'' - 6y - 12xy' - 3x^2y'' = 0 \Rightarrow$$
$$y''(x) = \frac{-2x + 2y - 2y(y')^2 + 4xy'}{y^2 - x^2}.$$

Rezultă $y''(0) = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} > 0$, deci $x_1 = 0$ este minim local şi $y''(-2) = -\frac{2}{3}$, deci $x_2 = -2$ este maxim local.

11. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^2 + y^2 - e^{2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$.
Soluţie
Condiţia de existenţă a funcţiei y este

$$y(x^2 + y^2) + xe^{2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} \neq 0.$$

Se obţine

$$y' = \frac{2ye^{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}} - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) + xe^{2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}};$$

punctele critice sunt:

$$x_1 = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}.$$

In aceste puncte $y(x_1) = x_1$ şi $y(x_2) = x_2$. Se calculează $y''(x_{1,2})$, etc.

12. Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare a funcţiei:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2$$

în domeniul mărginit

$$\overline{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Soluţie

Pentru început căutăm punctele de extrem local în interiorul domeniului, adică în:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$$

Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + \sqrt{3}y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases}$$

Punctul $(0,0)$ este unicul punct critic.

$$d^2 f\,(0,0) = dx^2 + 2\sqrt{3}dxdy - dy^2$$

Deoarece $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -4 < 0$, rezultă că forma pătratică $d^2 f\,(0,0)$ este alternantă, deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

În continuare căutăm punctele de extrem local pe frontiera domeniului $\overline{D}$, adică pe cercul

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Am obţinut astfel o problemă de extrem cu legături, şi anume:

13. Să se determine valorile extreme ale produsului xy când x şi y sunt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuaţie $x^2 + 2y^2 = 1$.
Soluţie
Problema este echivalentă cu a găsi valorile extreme ale funcţiei $f(x,y) = xy$ cu legătura $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$.
Considerăm funcţia $F(x,y) = xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$. Din sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = & y + 2\lambda x = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & x + 4\lambda y = & 0 \\ g = & x^2 + 2y^2 - 1 = & 0 \end{cases}$$

rezultă $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Pentru $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$, rezultă :
$(x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ şi $(x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Pentru $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, rezultă :
$(x_3, y_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 'si $(x_4, y_4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Valorile extreme ale funcţiei continue f pe elipsă (care este mulţime compactă) sunt: $f(x_1, y_1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ (minim) şi $f(x_3, y_3) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (maxim).

14. Să se afle valorile extreme ale funcţiei
$f\,(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \dfrac{1}{2}y^2$, cu legătura $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Soluţie
Considerăm funcţia auxiliară

$$F\,(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Punctele sale critice se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & x + \sqrt{3}y + 2\lambda x = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = & \sqrt{3}x - y + 2\lambda y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = & x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Primele două ecuaţii se scriu

$$\begin{cases} (1 + 2\lambda)\, x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x + (2\lambda - 1)\, y = 0 \end{cases}$$

Cum $(x, y) \neq (0, 0)$ pe Γ, determinantul acestui sistem trebuie sa fie 0:
$\begin{vmatrix} 1 + 2\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 4\left(\lambda^2 - 1\right) = 0$, deci $\lambda = \pm 1$.
Pentru $\lambda = 1$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

care are soluţiile $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Aşadar, punctele critice pentru $\lambda = 1$ sunt $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Fie $F_1(x, y) = F(x, y, 1) = \dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \dfrac{1}{2}y^2 + x^2 + y^2 - 1$ şi fie $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Atunci:
$d^2F_1(x, y) = 3dx^2 + 2\sqrt{3}dxdy + dy^2$ şi
$d\varphi(x, y) = 2xdx + 2ydy = 0$
Deoarece $d\varphi\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = dx - \sqrt{3}dy$, deducem că $dx = \sqrt{3}dy$ şi, mai departe, că forma pătratică $d^2F_1\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16dy^2$ este pozitiv definită. Rezultă că punctul $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este un punct de minim local condiţionat. Avem $f\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1$.

La aceeaşi concluzie ajungem pentru punctul critic $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Pentru $\lambda = -1$ se obţin punctele critice $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Dacă notăm cu $F_2(x, y) = F(x, y, -1) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2 - x^2 - y^2 + 1$, atunci $d^2F_2(x, y) = -dx^2 + 2\sqrt{3}dxdy - 3dy^2$.

Cum $d\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx + \frac{1}{2}dy\right) = \sqrt{3}dx + dy = 0$, rezultă că $dy = -\sqrt{3}dx$ şi, mai departe, că forma pătratică $d^2F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -16dx^2$ este negativ definită. Rezultă că punctul $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este un punct de maxim local condiţionat şi $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$.

Pentru punctul $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ concluzia este aceeaşi.

În concluzie, valorile extreme ale funcţiei f în domeniul $\overline{D}$ sunt:

$f_{\min} = -1$ şi $f_{\max} = 1$.

15. Să se determine triunghiul de perimetru dat $2p$, care printr-o rotaţie în jurul uneia din laturi, generează un corp de volum maxim.

Soluţie

Dacă notăm cu x, y şi z lungimile laturilor triunghiului, atunci $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ şi $x + y + z = 2p$.

Conform formulei lui Heron, aria triunghiului este :

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

deci înălţimea corespunzătoare bazei de lungime z este

$$h = \frac{S}{z} = \frac{\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}}{z}$$

Prin rotirea triunghiului în jurul laturii z se obţine un corp format din două conuri de rază $r = h$ şi înălţimi z_1 şi z_2 cu proprietatea că $z_1 + z_2 = z$.

Volumul corpului de rotaţie obţinut este

$$V = \frac{\pi h^2 z}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)}{z}$$

Se obţine astfel următoarea problemă de extrem cu legături:

16. Să se afle valoarea maximă a funcţiei

$V\left(x,y,z\right) = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)}{z}$, cu legătura

$$x+y+z=2p, \quad x>0,\ y>0,\ z>0$$

Soluţie

Considerăm funcţia auxiliară

$$F\left(x,y,z,\lambda\right) = \frac{\pi p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)}{3z} + \lambda\left(x+y+z-2p\right)$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & -\dfrac{\pi p\left(p-y\right)\left(p-z\right)}{3z} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = & -\dfrac{\pi p\left(p-x\right)\left(p-z\right)}{3z} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} & = & -\dfrac{\pi p^2\left(p-x\right)\left(p-y\right)}{3z^2} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = & x+y+z-2p=0 \end{cases}$$

obţinem $x = \dfrac{3p}{4},\ y = \dfrac{3p}{4},\ z = \dfrac{p}{2},\ \lambda = \dfrac{\pi p^2}{12}$.

În continuare avem:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\ ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2\pi p^2\left(p-x\right)\left(p-y\right)}{3z^3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\pi p\left(p-z\right)}{3z}; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\pi p^2\left(p-y\right)}{3z^2}; \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\pi p^2\left(p-x\right)}{3z^2}$$

Fie $F_1\left(x,y,z\right) = F\left(x,y,z,\dfrac{\pi p^2}{12}\right)$

$$d^2F_1\left(\frac{3p}{4},\frac{3p}{4},\frac{p}{2}\right) = \frac{2\pi p}{3}\left(\frac{1}{2}dz^2 + dy + dxdz + dydz\right)$$

Diferenţiind legătura $x + y + z - 2p = 0$ obţinem:
$dx + dy + dz = 0$ şi mai departe $dz = -dx - dy$.

Înlocuind în diferenţiala de ordinul II rezultă că:
$d^2F_1\left(\frac{3p}{4}, \frac{3p}{4}, \frac{p}{2}\right) = -\frac{\pi p}{3}\left(dx^2 + dy^2\right)$ este negativ definită. Aşadar punctul $\left(\frac{3p}{4}, \frac{3p}{4}, \frac{p}{2}\right)$ este un punct de maxim condiţionat. Triunghiul căutat are dimensiunile laturilor: $x = \frac{3p}{4},\ y = \frac{3p}{4},\ z = \frac{p}{2}$.

17. O companie aeriană a impus ca pentru bagajul de mână suma dintre lungime, lăţime şi înălţime să nu depăşească 1 m (se presupune că forma bagajului este rectangulară). Ce dimensiuni ar trebui să aibă bagajul pentru a avea volumul maxim?

Soluţie

Fie x, y, z lungimea, lăţimea şi respectiv, înălţimea bagajului de mână, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$. Restricţia din problemă se scrie $x + y + z = 1$. Funcţia ce trebuie maximizată este dată de volumul paralelipipedului $V = xyz$. Ţinând cont de acestea, rezultă că trebuie să găsim maximul funcţiei:

$$f(x, y) = xy(1 - x - y) \text{ pe } (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Determinăm punctele staţionare ale funcţiei rezolvând sistemul dat de derivatele parţiale ale funcţiei:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y(1 - 2x - y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \ \text{(nu convine)} \\ \text{sau} \\ x = y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Singurul punct staţionar este $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Matricea Hessiană este:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

iar în M :

$$\mathcal{H}_M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ţinând cont de faptul că $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_M = -\frac{1}{3} < 0$ şi $AC - B^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_M \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_M - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_M\right)^2 = \frac{1}{3} > 0$, obţinem că $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ este punct de maxim iar maximul funcţiei este

$$f_{max} = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27} \approx 0,037\ m^3 = 37\ dm^3 = 37\ litri.$$

În concluzie, bagajul are volumul maxim de $37,037\ litri$ dacă dimensiunile sale sunt $x = y = z = \dfrac{1}{3} \approx 0,33\ m.$

18. Dimensionaţi un acvariu cu volumul de $500\ m^3$ pentru care să se consume minimum de material.

Soluţie Dacă notăm cu x şi y dimensiunile bazei şi cu z înălţimea, atunci suprafaţa acvariului este $S = xy + 2xz + 2yz$ iar restricţia problemei este dată de volumul acvariului $xyz = 500\ m^3$.

Substituind z din restricţie obţinem funcţia ce trebuie minimizată pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$:

$$f(x, y) = xy + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{y}.$$

Punctele critice se determină din sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - \dfrac{1000}{x^2} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - \dfrac{1000}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Scoţând y din prima ecuaţie şi înlocuind în cea de-a doua, obţinem:

$$x \left(1 - \frac{x^3}{1000}\right) = 0,$$

din care rezultă $x = 0$ sau $x = 10$. Singura valoare acceptabilă este $x = 10$, de unde avem $y = 10$. Deci singurul punct critic este $M(10, 10)$.

Matricea Hessiană este:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2000}{x^3} & 1 \\ \\ 1 & \frac{2000}{y^3} \end{pmatrix}$$

iar în M :

$$\mathcal{H}_M(10, 10) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cum $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$ şi $AC - B^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 3 > 0$, punctul $M(10, 10)$ este punct de minim iar minimul funcţiei este

$$f_{min} = f(10, 10) = 300.$$

Pentru $x = 10$ şi $y = 10$ obţinem $z = \frac{500}{10\cdot 10} = 5$.

Aşadar acvariul trebuie construit cu baza de 10 m pe 10 m şi înălţimea de 5 m, caz în care suprafaţa minimă este de 300 m^2 şi consumul de material este minim, implicit costurile de realizare sunt minime.

19. Problema de mai sus poate fi formulată în situaţia în care consumul de materiale este limitat, metoda de rezolvare fiind diferită (metoda multiplicatorilor lui Lagrange):

Să se dimensioneze un acvariu paralelipipedic de volum maxim, ştiind că avem disponibili numai 48 m^2 de material disponibil.

Soluţie. Dacă notăm cu x şi y dimensiunile bazei şi cu z înălţimea, atunci dorim să maximizăm volumul acvariului $V = xyz$, având restricţia dată de suprafaţa de material folosit:

$$S = xy + 2xz + 2yz = 48 \ m^2.$$

Evident, $x > 0,\ y > 0$ şi $z > 0$.

Dacă notăm restricţia cu $F(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 48 = 0$, atunci funcţia de maximizat este

$$f(x, y, z) = xyz \quad \text{pe} \quad (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Considerăm funcţia lui Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 48).$$

Determinăm punctele staţionare rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla F(x,y,z) \\ \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \\ F(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Obţinem

$$\begin{cases} yz = \lambda(y + 2z) \\ xz = \lambda(x + 2z) \\ xy = \lambda(2x + 2y) \\ xy + 2xz + 2yz = 48 \end{cases}$$

Eliminând λ din primele două ecuaţii avem:

$$\frac{yz}{y + 2z} = \frac{xz}{x + 2z} \iff xz(y + 2z) = yz(x + 2z).$$

Urmează că $z = 0$(nu convine) sau $x = y$.

Înlocuind în ecuaţia a treia se obţine $x = 0$(nu convine) sau $x = 4\lambda$. Din cea de-a doua ecuaţie rezultă $4\lambda z = \lambda(4\lambda + 2z) = 4\lambda^2 + 2\lambda z$, de unde $z = 0$ (nu convine) sau $z = 2\lambda$.

Aşadar, $x = y = 4\lambda$ şi $z = 2\lambda$ împreună cu ultima ecuaţie conduc la:

$$16\lambda^2 + 16\lambda^2 + 16\lambda^2 = 48.$$

Obţinem $\lambda = \pm 1$ şi în consecinţa $x = y = 4$ şi $z = 2$, adică punctul staţionar este $M(4, 4, 2)$.

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}_{(x,y,z)} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2}(dz)^2 + \\ &\quad +2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial x}dzdx = \\ &= 2(z - \lambda)dxdy + 2(x - 2\lambda)dydz + 2(y - 2\lambda)dzdx. \end{aligned}$$

$$d^2\mathcal{L}_{(\lambda=1)}(4, 4, 2) = 2dxdy + 4dydz + 4dzdx$$
$$d^2\mathcal{L}_{(\lambda=-1)}(4, 4, 2) = 6dxdy + 12dydz + 12dzdx$$

Diferenţiind restricţiile avem:

$$(y + 2z)dx + (z + 2z)dy + 2(x + y)dz = 0.$$

Pentru punctul staţionar $M(4, 4, 2)$ se obţine: $8dx+8dy+16dz = 0$, de unde $dx = -dy-2dz$. Atunci $d^2\mathcal{L}_{(\lambda=1)}(4, 4, 2) = -2(dy+dz)^2-6(dz)^2$, respectiv $d^2\mathcal{L}_{(\lambda=-1)}(4, 4, 2) = -6(dy + dz)^2 - 18(dz)^2$.

În consecinţă, $M(4, 4, 2)$ este punct de maxim, valoarea maximă a funcţiei fiind

$$f_{max} = f(4, 4, 2) = 32\ m^3.$$

Deci acvariul trebuie să aibă baza pătrată de latură 4 m şi înălţimea de 2 m, pentru avea volumul maxim de 32 m^3.

20. Presupunem că temperatura unei plăci de metal în fiecare punct al său este dată de funcţia

$$T(x, y) = 1 + x^2 - y^2.$$

Să se determine traiectoria unei particule de căldură, ce are originea în punctul $(-2, 1)$.

Soluţie.

Particula se mişcă în direcţia vectorului gradient

$$\nabla T = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}.$$

Vom determina curba

$$C : r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

cu originea în punctul $(-2, 1)$, cu proprietatea că în fiecare punct există vector tangent în direcţia ∇T. Pentru prima condiţie trebuie să impunem ca

$$x(0) = -2, \quad y(0) = 1,$$

iar pentru a doua

$$x'(t) = 2x(t), \quad y'(t) = -2y(t).$$

Prima ecuaţie este echivalentă cu

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 2 \Rightarrow \ln|x(t)| = 2t + C_1, C_1 \in \mathbb{R}, \Rightarrow x(t) = Ce^{2t}, C \in \mathbb{R}.$$

Întrucât $x(0) = -2$, deducem că $C = -2$. Deci,

$$x(t) = -2e^{2t}.$$

Analog se obţine

$$y(t) = e^{-2t}.$$

Eliminând t, deducem

$$xy = -2.$$

În concluzie, particula se deplasează din punctul $(-2, 1)$ pe una din ramurile hiperbolei de ecuaţie $xy = -2$, în direcţia în care x descreşte.

21. Să se arate că, dintre toate triunghiurile înscrise într-un cerc de rază R, triunghiul echilateral are cel mai mare perimetru.

Soluţie.

Fie $\triangle ABC$ înscris într-un cerc de rază R şi notăm cu x, y, z unghiurile la centru care subîntind laturile BC, CA respectiv AB. Se ştie din Teorema sinusurilor că

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$

Dar, $\sin A = \sin\frac{x}{2}$, $\sin B = \sin\frac{y}{2}$, $\sin C = \sin\frac{z}{2}$.

Din cele de mai sus deducem că perimetrul $\triangle ABC$ este dat de funcţia

$$f(x, y, z) = 2R(\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2} + \sin\frac{z}{2}),$$

cu condiţia $x + y + z = \pi, x > 0, y > 0, z > 0$.

Definim funcţia auxiliară (funcţia lui Lagrange):

$$F(x, y, z) = 2R(\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2} + \sin\frac{z}{2}) + \lambda(x + y + z - \pi).$$

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = R\cos\dfrac{x}{2} + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = R\cos\dfrac{y}{2} + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z} = R\cos\dfrac{z}{2} + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - \pi = 0 \end{cases}$$

de unde obţinem relaţia $\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{y}{2} = \cos\frac{z}{2} = -\frac{\lambda}{R}$, în ipoteza $x, y, z \in (0, \pi\,]$.

Aşadar, punctul staţionar M are coordonatele $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ şi este corespunzător lui $\lambda = -R\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei F sunt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{R}{2}\sin\frac{x}{2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{R}{2}\sin\frac{y}{2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\frac{R}{2}\sin\frac{z}{2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x} = 0.$$

Fie funcţia $F_1(x, y, z) = F(x, y, z, -\frac{R\sqrt{3}}{2})$.

$$d^2F_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{R}{2}\sin\frac{\pi}{6}(dx^2+dy^2+dz^2) = -\frac{R}{4}(dx^2+dy^2+dz^2) < 0.$$

Deci, $d^2F_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ este formă pătratică negativ definită, ceea ce ne asigură că $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ este punct de maxim condiţionat.

În concluzie, triunghiul cu perimetru maxim înscris în cercul de rază R are proprietatea

$$m(A) = m(B) = m(C) = \frac{\pi}{3},$$

adică este triunghi echilateral.

22. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ pe mulţimea $\{(x,y,z) \in R^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Soluţie

Funcţia f este continuă, iar mulţimea dată este compactă, deci există cel puţin două puncte de extrem (în care f îşi atinge valorile extreme). Fie $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$; rezultă sistemul sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2\lambda x & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2\lambda y & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 2\lambda z & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Sistemul format din primele trei ecuaţii are soluţiile $x = y = z = 0$ şi $x = y = z = -\frac{2}{3}\lambda$. Prima soluţie nu verifică ultima ecuaţie; cea de a doua, înlocuită în ultima ecuaţie dă $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se obţin soluţiile $x_1 = y_1 = z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $x_2 = y_2 = z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculând valorile funcţiei f în aceste puncte, rezultă valorile extreme ale lui f.

23. Fie $a, b, c \in R$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$; să se determine valorile extreme ale funcţiei

$$f : R^3 \mapsto R,\; f(x,y,z) = ax + by + cz,$$

pe mulţimea $D = \{(x,y,z) \in R^3 \;\mid\; x^2+y^2+z^2 = r^2\}$.

Soluţie

Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Fie $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2$ şi $F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ Mulţimea D este compactă. Deoarece f este continuă, rezultă că f este îşi atinge marginile pe D. In concluzie, f are cel puţin un punct de minim global condiţonat de g şi un punct de maxim global condiţionat de g.

Sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = & a - 2\lambda x = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = & b - 2\lambda y = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = & c - 2\lambda z = & 0 \\ g = & x^2+y^2+z^2-r^2 = & 0 \end{cases}$$

are soluţiile $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2r}$, $(x,y,z) = \left(\dfrac{a}{2\lambda}, \dfrac{b}{2\lambda}, \dfrac{c}{2\lambda}\right)$.

Deoarece f are cel puţin două puncte de extrem globale pe D, deducem că valoarile extreme ale lui f sunt $\pm\, r\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

24. Fie matricea (simetrică de ordinul n),

$$A = (a_{ij})_{ij},\ a_{ij} = a_{ji},\ \forall i,j \in \{1,2,...,n\}.$$

Să se determine valorile extreme ale funcţiei (formei pătratice)

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

pe sfera $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$.
Soluţie
Construim funcţia lui Lagrange

$$F(x_1,x_2,...,x_n) = f(x_1,x_2,...,x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2 - 1).$$

Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2\lambda x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} - 2\lambda x_2 = 0 \\ ..... & \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} - 2\lambda x_n = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} &= 1 - (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) = 0 \end{cases}$$

Sistemul se scrie sub forma echivalentă :

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n &= 0 \\ .... & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 &= 1 \end{cases}$$

Evident, sistemul liniar (format din primele n ecuaţii) are soluţii nenule dacă şi numai dacă λ este valoare proprie a matricei A (valorile proprii sunt reale deoarece A este matrice simetrică). In acest caz, pentru a calcula valorile extreme ale funcţiei f, se înmulţeşte prima ecuaţie de mai sus cu x_1, a doua cu x_2, ş.a.m.d., a n-a ecuaţie cu x_n şi se adună membru cu membru cele n relaţii obţinute; rezultă :

$$f(x_1,x_2,...,x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) = 0$$

In concluzie, pe sfera unitate are loc egalitatea $f(x_1,x_2,...,x_n) = \lambda$. Rezultă că valorile minimă şi maximă ale funcţiei f sunt cea mai mică şi (respectiv) cea mai mare valoare proprie ale matricei A.

18.7 Serii numerice

1. Să se afle suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$$

Soluţie

$$u_n = \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$$

Folosind proprietăţile funcţiei logaritm deducem că:

$$u_n = -\ln n + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+3)$$

Dând valori particulare lui n, rezultă:

$$\begin{array}{ll}
u_1 & = -\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln 4 \\
u_2 & = -\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 \\
u_3 & = -\ln 3 + \ln 4 + \ln 5 - \ln 6 \\
u_4 & = -\ln 4 + \ln 5 + \ln 6 - \ln 7 \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
u_{n-3} & = -\ln(n-3) + \ln(n-2) + \ln(n-1) - \ln n \\
u_{n-2} & = -\ln(n-2) + \ln(n-1) + \ln n - \ln(n+1) \\
u_{n-1} & = -\ln(n-1) + \ln n + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\
u_n & = -\ln n + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+3) \\
\hline
s_n & = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \ln 3 + \ln\frac{n+1}{n+3} \to \ln 3
\end{array}$$

Aşadar seria este convergentă şi suma sa este $\ln 3$.

2. Să se afle natura seriilor:

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n^2}\ ; \quad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^2}$$

Soluţie

a) Seria este divergentă pentru că $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n^2} = 1 \neq 0$.

b) Este o serie cu termeni pozitivi şi aplicăm criteriul II de comparaţie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \pi \in (0,\infty)$$

Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^2}$ este convergentă.

3. Să se afle natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad a > 0.$$

Soluţie

Este o serie cu termeni pozitivi şi aplicăm criteriul rădăcinii:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n\sqrt{n}}}{a+\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$$

(Am folosit faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}} = 1$.)

Dacă $a > 1$ rezultă că seria este convergentă.

Dacă $a < 1$ seria este divergentă.

Dacă $a = 1$ seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sqrt{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, care este divergentă deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \infty$.

4. Fie $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ o funcţie descrescătoare şi fie

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx$$

a) Să se arate că şirul $\{a_n\}$ este descrescător şi

$$0 \le a_n \le f(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

b) Să se arate că şirul

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este convergent.

c) Să se arate că seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ este convergentă dacă $\alpha > 1$ şi divergentă dacă $\alpha \le 1$.

Soluţie

a) Deoarece f este descrescătoare rezultă că este local integrabilă şi

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le f(k-1)$$

Dând valori particulare lui k, obţinem:

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq f(1)$$
$$f(3) \leq \int_2^3 f(x)\,dx \leq f(2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n-1)$$

În urma sumării rezultă:

$$-f(1) + \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)$$

şi mai departe,

$$0 \leq f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1), \quad \text{deci}$$

$$0 \leq a_n \leq f(1), \quad \forall n.$$

Pe de altă parte,

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq 0,$$

de unde deducem că şirul $\{a_n\}$ este descrescător.

b) Pentru cazul particular al funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad x \in [1, \infty)$, şirul devine:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Din **a)** deducem că acest şir este descrescător şi mărginit, deci convergent. Limita sa se notează cu C (sau γ).

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C$.

Acest număr este iraţional şi este egal aproximativ cu $0,577$ ($C \approx 0,577$).

Dacă notăam cu $\varepsilon_n = a_n - C$, atunci $\varepsilon_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ şi are loc formula

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$$

c) Din formula precedentă deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty,$$

deci seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă.

Dacă $\alpha\leq 1$, atunci $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n^{\alpha}}$ şi din criteriul I de comparaţie rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ este divergentă în acest caz.

Fie $\alpha>1$ şi $f\left(x\right)=\frac{1}{x^{\alpha}}$

Cum $\int\limits_{1}^{n}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{\left(\alpha-1\right)n^{\alpha-1}}$, din **a)** rezultă că

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\left(\alpha-1\right)n^{\alpha-1}}\leq 1,$$

deci

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\leq 1+\frac{1}{\alpha-1}\ ,\quad \forall n.$$

Rezultă că şirul sumelor parţiale este mărginit, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ este convergentă dacă $\alpha>1$.

5. Să se afle natura seriilor:

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\ ;\quad \textbf{b)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\alpha}}\ ;\quad \textbf{c)}\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\left[\ln\left(\ln n\right)\right]^{\alpha}}$$

Soluţie

Din criteriul integral al lui Cauchy rezultă că aceste serii au aceeaşi natură cu integralele improprii

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}\ ,\quad \int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{\alpha}}\ ,\quad \int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x\left[\ln\left(\ln x\right)\right]^{\alpha}}$$

care sunt divergente pentru $\alpha\leq 1$ şi convergente pentru $\alpha>1$:

a) Natura primei integrale este cunoscută, fiind una din integralele improprii test.

b) Dacă $\alpha\neq 1$,

$$\int_{2}^{u}\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{\alpha}}=\int_{2}^{u}\left(\ln x\right)^{-\alpha}\left(\ln x\right)'dx=\left.\frac{\left(\ln x\right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{2}^{u}=$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln u)^{\alpha-1}}\right).$$

În continuare avem:

$$\lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{dacă } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}} & \text{dacă } \alpha > 1 \end{cases}$$

Dacă $\alpha = 1$, atunci

$$\int_2^u \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^u = \ln(\ln u) - \ln(\ln 2) \to \infty.$$

Aşadar, $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$ este convergentă dacă $\alpha > 1$ şi divergentă dacă $\alpha \leq 1$.

c) Dacă $\alpha = 1$, atunci $\int\limits_3^u \frac{dx}{x\ln x\,[\ln(\ln x)]} = \ln[\ln(\ln x)]\big|_3^u$

Dacă $\alpha \neq 1$, atunci $\int\limits_3^u \frac{dx}{x\ln x\,[\ln(\ln x)]^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\,[\ln(\ln x)]^{1-\alpha}\Big|_3^u$. Rezultă că integrala este divergentă pentru $\alpha \leq 1$ şi convergentă pentru $\alpha > 1$.

6. Să se studieze natura seriilor

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{n^2+n+1}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$

Solutie. a) Termenul general se scrie sub forma $u_n = \text{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \text{arctg}\frac{1}{n} - \text{arctg}\frac{1}{n+1}$, si atunci $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \text{arctg}1 - \text{arctg}\frac{1}{n+1}$, care este convergent şi are limita $\frac{\pi}{4}$, deci seria este convergentă şi are suma $\frac{\pi}{4}$.

b) In acest caz $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 1$, care este convergent şi are limita -1, deci seria este convergentă şi are suma -1.

c) Se arată că $u_n = \sin n \nrightarrow 0$, deci seria este divergentă.

7. Să se studieze natura seriilor

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a(a+1)...(a+n-1)}, a>0$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+a})^{n^2}, a>0.$

Soluţie. a) Aplicând criteriul raportului obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n}=1,$$

deci nu se poate decide natura seriei. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(a-1)}{n+1}=a-1.$$

Dacă $a-1>1$, echivalent $a>2$, seria este convergentă, iar dacă $a-1<1$, echivalent $a<2$ seria este divergentă. Pentru $a=2$ se obţine seria armonică, o serie divergentă.

b) Aplicăm criteriul raportului: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+a}\right)^n=e^{-a}<1$, deci seria este convergentă.

8. Folosind eventual seriile, să se arate că:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, unde $k>0, a>1$,

b) şirul cu termenul general $x_n=\sum_{k=1}^{n}cos\frac{k!}{2^k}$, este convergent.

Soluţie. a) Aplicând criteriul raportului se arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ este convergentă. Din condiţia necesară de convergenţă va rezulta că termenul general are limita 0.

b) Folosind criteriul de comparaţie cu inegalităţi se arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty}cos\frac{n!}{2^n}$ este absolut convergentă, deci convergentă. Conform definiţiei, şirul sumelor parţiale, adică (x_n), este convergent.

9. Folosind faptul că seria $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+...$ este convergentă şi are suma e să se arate că $e\notin R\setminus Q$.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că $e=\frac{p}{q}$, unde $p,q\in N^*, (p,q)=1$ şi fie $S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!},\;\; r_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...$

Evident avem $0 < r_n < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ...\right) = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!\,n}$, de unde $0 < e - S_n < \frac{1}{n!\,n}, (\forall)n \geq 1$. Pentru $n = q$ obţinem $0 < e - S_q < \frac{1}{q!\,q}$, de unde $0 < (e - S_q)q! < \frac{1}{q}$, contradicţie, deoarece $(e - S_q)q! \in N^*$.

18.8 Integrale improprii

1. Să se studieze convergenţa următoarelor integrale improprii:

   a) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1}dx$; b) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - 1 - \sin x}$.

   Soluţie

   a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} \geq 0, \forall x \in (0, 1]$.

   Fie $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0, 1]$. Observăm că $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x}{e^{\sin x} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^{\sin x}\cos x} = 1$. Cum $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ este convergentă, rezultă că $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1}dx$ este convergentă.

   b) Din inegalitatea $e^x \geq 1 + x$ deducem că:

   $$e^x - 1 - \sin x \geq x - \sin x \geq 0, \forall x \in (0, 1].$$

   Fie $g(x) = \dfrac{1}{x^2}, x \in (0, 1]$. Deoarece

   $$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1 - \sin x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{2x}{e^x - \cos x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{2}{e^x + \sin x} = 2$$

   şi $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2}$ este divergentă, rezultă că $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{e^x - 1 - \sin x}$ este divergentă.

2. Să se studieze convergenţa, şi în caz afirmativ să se calculeze următoarea integrală:

   $$\int_1^\infty \frac{dx}{x\,(x^2 + 1)}.$$

   Soluţie

Fie $1 < u < \infty$ oarecare.

$$\int_1^u \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)} = \int_1^u \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \ln x|_1^u - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^u =$$

$$= \ln u - \frac{1}{2}\left[\ln\left(u^2+1\right) - \ln 2\right] = \ln u - \ln\sqrt{\frac{u^2+1}{2}} = \ln\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{u^2+1}}.$$

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)} = \lim_{u\to\infty}\ln\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{u^2+1}} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

3. Să se calculeze:

$$\int_1^\infty \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

Soluţie

Integrând prin părţi obţinem:

$$\int_1^u \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} = -\left.\frac{\ln x}{x\left(1+x^2\right)}\right|_1^u + \frac{1}{2}\int_1^u \frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}$$

$$\left(\begin{array}{cc} f(x) = \ln x, & f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}, & g(x) = -\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)} \end{array}\right)$$

Din exerciţiul precedent deducem că: $\lim\limits_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{2}\ln 2$.

Aşadar, avem:

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = -\lim_{u\to\infty}\frac{\ln u}{2\left(1+u^2\right)} + \frac{1}{4}\ln 2.$$

Cum $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\ln u}{2\left(1+u^2\right)} = 0$, rezultă că $\int_1^\infty \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{4}\ln 2$.

4. Să se calculeze:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

Soluţie

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continuă şi $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a,b]$, o funcţie de clasă C^1, strict crescătoare cu proprietăţile: $\varphi(\alpha) = a$ şi $\lim\limits_{t \nearrow \beta} \varphi(t) = b$.

Se ştie că dacă una din integralele $\int_a^b f(x)\, dx$, respectiv $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\, dt$ este convergentă atunci şi cealaltă este convergentă şi are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

Fie $x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t, t \in [0, \pi/2)$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{t}{(1+tg^2 t)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\frac{1}{\cos^3 t} \cdot \cos^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} t \cos t dt = t \sin t|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

5. Să se studieze convergenţa absolută a integralei:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \ p > 0.$$

Soluţie

Dacă $p > 1$ atunci $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ este convergentă.

Cum $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}, \forall x \in [1, \infty)$, deducem că $\int\limits_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ este convergentă.

Aşadar $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ este absolut convergentă şi în particular convergentă dacă $p > 1$.

Dacă $p = 1$ atunci avem:

$$\int_1^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx >$$

$$> \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(i+1)\,\pi} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin x| dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2}{(i+1)\,\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} \right) \to \infty \text{ când } k \to \infty.$$

Rezultă că $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ este divergentă.

Dacă $0 < p \leq 1$ atunci $\frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{|\sin x|}{x}$ de unde deducem că $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ este divergentă dacă $0 < p \leq 1$.

Aşadar $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$ nu este absolut convergentă dacă $0 < p \leq 1$.

Vom arăta însă că $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$ este convergentă pentru $0 < p \leq 1$.

Într-adevăr, $\int\limits_1^u \frac{\sin x}{x^p} dx = -\frac{\cos u}{u^p} + \cos 1 - p \cdot \int\limits_1^u \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx.$

Deoarece $\left| \frac{\cos x}{x^{p+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{p+1}}$ şi $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{p+1}} dx$ este convergentă pentru $p > 0$, rezultă că $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$ este absolut convergentă şi deci convergentă.

Mai departe avem:

$\lim\limits_{u\to\infty} \int\limits_1^u \frac{\sin x}{x^p} dx = \cos 1 - p \cdot \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx < \infty$, dacă $p > 0$.

6. Folosind definiţia să se studieze natura integralelor şi în caz de convergenţă să se calculeze:

   a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{arctg } x}{1+x^2} dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx.$

Soluţie. a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{\text{arctg } t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \text{arctg}^2 x$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi^2}{8}$, deci integrala este convergentă şi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{arctg } x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{8}.$

b) $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt = \int_x^1 \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, deci integrala este convergentă şi $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

c) Este o integrală improprie de al doilea tip, $\lim\limits_{x\to1,x>1} f(x) = \infty$, unde $f : (1,2] \to R, f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. In acest caz $F(x) = \int_x^2 f(t)dt = \int_x^2 \frac{1}{t\ln t}dt = \ln(\ln 2) - \ln(\ln x)$ şi cum $\lim\limits_{x\to1,x>1} F(x) = \infty$, rezultă că integrala este divergentă.

7. Să se arate că următoarele integrale sunt convergente şi să se calculeze:
a) $\int_0^{\infty} e^{-2x}\cos 3x dx$ b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$
Soluţie.
a) $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{-2t}\cos 3t dt = \frac{3}{13}e^{-2x}\sin 3x - \frac{2}{13}e^{-2x}\cos 3x + \frac{2}{13}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \frac{2}{13}$, deci integrala este convergentă şi $\int_0^{\infty} e^{-2x}\cos 3x dx = \frac{2}{13}$.
b) $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\text{arctg}x - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$, deci integrala este convergentă şi $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

8. Folosind criteriile de convergenţă să se studieze natura integralelor:

a) $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x^7+3x+1}}dx$, b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$.

Soluţie. a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{x^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{2+\frac{3}{x^6}+\frac{1}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, pentru $\alpha = \frac{4}{3} > 1$, deci integrala este convergentă.

b) $\lim\limits_{x\to1,x<1} (1-x)^{\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to1,x<1} \frac{(1-x)^{\alpha}}{(1-x)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, pentru $\alpha = \frac{1}{3} < 1$, deci integrala este convergentă.

18.9 Şiruri şi serii de funcţii. Serii de puteri

1. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirului de funcţii:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}=\sqrt{x^2}=|x|, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că şirul $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplu la funcţia $f(x)=|x|$, pe $\mathbb{R}$.

Pe de altă parte observăm că:

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{x^2}\right|=\frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Rezultă că:

$$m_n=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0.$$

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n=0$, deci $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$ la funcţia f.

2. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirului de funcţii:

$$f_n(x)=x^n(1-x^n), x\in[0,1].$$

Soluţie

Dacă $x\in[0,1)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

Dacă $x=1$ atunci $f_n(1)=0, \forall n$.

Rezultă că $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplu pe $[0,1]$ la funcţia f, unde

$$f(x)=0, \forall x\in[0,1].$$

Pe de altă parte avem:

$f_n'(x)=nx^{n-1}(1-2x^n)$ şi, mai departe,

x	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Rezultă că $m_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) = \frac{1}{4}, \forall n.$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \frac{1}{4} \neq 0$, rezultă că $\{f_n\}_{n\geq 1}$ nu converge uniform pe $[0,1]$ la funcţia $f = 0$.

3. Să se studieze convergenţa uniformă a următoarei serii de funcţii;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie

Observăm că $\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leq \frac{1}{2n^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ este convergentă, din criteriul lui Weierstrass rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

4. Să se afle raza de convergenţă, mulţimea de convergenţă si suma următoarei serii de puteri:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}.$$

Soluţie

$a_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$ şi $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+4}{3n+1} = 1$. Rezultă că seria este absolut convergentă pentru $|x| < 1$ şi divergentă pentru $|x| > 1$.

Pentru $x = 1$ obţinem seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, care este o serie alternată, convergentă conform criteriului lui Leibniz.

Pentru $x = -1$, obţinem seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{4n+1}}{3n+1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ care este divergentă. Rezultă că mulţimea de convergenţa este $A = (-1, 1]$.

Fie funcţia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}, \ x \in (-1, 1].$$

Folosind proprietatea de derivare termen cu termen deducem că:
$f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = 1 - x^3 + x^6 - ... = \dfrac{1}{1+x^3}, \forall x \in (-1,1)$, deci

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \int \frac{dx}{(1+x)(1-x+x^2)}.$$

Pentru calculul integralei descompunem funcţia de sub integrală în fracţii simple:

$$\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C}{(1+x)(1-x+x^2)}.$$

Identificând coeficienţii obţinem sistemul:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

care admite soluţia $A = \dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{3}, C = \dfrac{2}{3}$.

În continuare avem:

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} == \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Aşadar, $f(x) = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(1+x)^2}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, x \in (-1,1)$.

Cum $f(0) = 0$, deducem că $C = \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

În particular avem: $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$, de unde rezultă că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5. Să se găsească raza de convergenţa, mulţimea de convergenţa şi suma următoarei serii de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

Soluţie

Avem $a_n = n^2$ şi $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Pentru $x = \pm 1$ seria este divergentă pentru că termenul general nu converge la 0.

Rezultă că mulţimea de convergenţa este $A = (-1, 1)$. Fie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1},\ x \in (-1, 1).$$

Folosind proprietatea de integrare termen cu termen a seriilor de puteri obţinem:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \forall x \in (-1, 1).$$

Fie $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x \in (-1, 1)$.

Printr-o nouă integrare obţinem:

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + ... = \frac{x}{1-x}, \forall x \in (-1, 1).$$

Derivând aceasta relaţie obţinem:

$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ şi mai departe avem:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in (-1, 1).$$

Derivând încă o dată obţinem:

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \forall x \in (-1, 1).$$

6. Fie $f_n : R_+ \to R, f_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n$. Să se arate că (f_n) converge uniform iar (f_n') converge neuniform.
   Soluţie. a) Cum $|f_n(x)| \le \dfrac{\pi}{2n}$, $(\forall)x \in R_+$ şi $\dfrac{\pi}{2n} \to 0$, rezultă că $f_n \xrightarrow{u} 0$.
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} = g(x)$, unde $g : R_+ \to R, g(x) = 0$, pentru $x \neq 1$ si $g(1) = \frac{1}{2}$, care nu este continuă, deci (f_n') converge neuniform.

7. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a următoarelor şiruri de funcţii pe intervalele indicate:
   a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}, x \in [0,\infty)$ b) $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2+1}, x \in R$
   c) $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}, x \in [0,\infty)$ d) $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^k, x \in (-1,1)$.
   Soluţie. a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$, unde $g : [0,\infty) \to R, g(x) = 1$, pentru $x \in [0,1), g(1) = \frac{1}{2}$ si $g(x) = 0$ pentru $x > 1$. Rezulta ca $f_n \xrightarrow{s} g$, dar neuniform, cum g nu este continuă.
   b) $|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2+1} \to 0$, deci (f_n) converge simplu şi uniform către $g = 0$, pe R.
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, (\forall)x \ge 0$, deci $f_n \xrightarrow{s} 0$ pe $[0,\infty)$.
   Cum $m_n = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| = 1$, rezultă că şirul nu este uniform convergent.

18.10 Serii Fourier

Să se dezvolte în serii Fourier funcţiile:

1. $f(x) = x$, pe $(-\pi,\pi)$

   Soluţie. Intrucât funcţia f e impară avem:

   $$a_k = 0, k \ge 0,$$

   iar $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin kx dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, k > 0$ (am integrat prin părţi, ţinând cont că $\sin k\pi = 0$ şi $\cos k\pi = (-1)^k$)

   Prin urmare,$\forall x \in R$ avem $x = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$

   Pentru $x = \frac{\pi}{2}$ se obţine $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

2. $f(x) = \pi^2 - x^2$, pe $(-\pi,\pi)$

Soluţie. Deoarece funcţia e pară $b_k = 0, k > 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos kx dx = \frac{4(-1)^{k-1}}{k^2}, k > 0$$

(am integrat prin părţi)

Atunci $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos kx$

Sunt îndeplinite condiţiile Teoremei 10.3, deci dezvoltarea e valabilă pentru $x \in [-\pi, \pi]$

Pentru $x = \pi$ se obţine $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{dacă } x \in (-\pi, 0) \\ bx, & \text{dacă } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Soluţie. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi}{2}(b - a)$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\cos nx dx + \int_0^{\pi} bx\cos nx dx\right)$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} ax\sin nx dx\right)$

Calculând prin părţi următoarele două integrale obţinem

$\int x\cos nx dx = \frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx + c_1$

$\int x\sin nx dx = -\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx + c_2$

unde c_1, c_2 sunt constante de integrare.

Avem

$$\int_{-\pi}^{0} t\cos kt dt = \frac{1}{k^2}[1 - (-1)^k], \int_0^{\pi} t\cos kt dt = -\frac{1}{k^2}[1 - (-1)^k]$$

$$\int_{-\pi}^{0} t\sin kt dt = -\pi\frac{(-1)^k}{k}, \int_0^{\pi} t\sin kt dt = -\pi\frac{(-1)^k}{k}$$

$$a_k = \frac{a - b}{\pi}\cdot\frac{1 - (-1)^k}{k^2}, b_k = (a + b)\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Se observă că avem

$$a_{2n-1} = \frac{2(a - b)}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n - 1)^2}, a_{2n} = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este

$$f(t) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nt}{n}$$

Observaţia 18.1. Din această dezvoltare putem calcula suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ care este convergentă. Intr-adevăr, funcţia $f(t)$ este continuă în punctul $t=0$ şi, cf. Teoremei 4.3, suma seriei Fourier în punctul $t=0$ este egală cu $f(0)$. Avem astfel

$0 = f(0) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$,de unde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

4.
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ t + \frac{\pi}{2}, & t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ -t + \frac{\pi}{2}, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Soluţie. Funcţia f este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0dt\right] = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)/_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$= \frac{\pi}{4}$

$a_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\cos ktdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cos ktdt\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos k\frac{\pi}{2}}{k^2}$

Seria Fourier a funcţiei date este $f(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2}\cos nt$

5. $f(x) = \mathrm{e}^{ax}, a \neq 0$, pe $(-\pi, \pi)$

Soluţie. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ax}dx = \frac{2}{a\pi}\mathrm{sh}a\pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nxdx = (-1)^n\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2a}{a^2+n^2}\cdot\mathrm{sh}a\pi$(am integrat prin părţi)

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nxdx = (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n}{a^2+n^2}\cdot\mathrm{sh}a\pi$(am integrat prin părţi)

Atunci $\mathrm{e}^{ax} = \frac{2}{\pi}\cdot\mathrm{sh}a\pi\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cdot(a\cos nx - n\sin nx)\right]$

6. $f(x) = |x|$, pe $[-\pi, \pi]$

Soluţie. f este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]$(am integrat prin părţi)

Deci $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

7. $f(x) = |\sin x|$, pe $(-\pi, \pi]$

Soluţie. f este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

Avem $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(n+1)x + \sin(1-n)x] dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n+1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$$

pentru $n =$ par

Atunci $|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$

8.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } -\pi < x < -\varphi, \varphi < x < \pi \\ \cos\varphi, & \text{dacă } -\varphi < x < \varphi \end{cases}$$

Soluţie. f este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\varphi \cos\varphi \cos nx dx +$$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_\varphi^\pi \cos x \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos\varphi \sin n\varphi}{n} -$$
$$- \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{2(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{2(n-1)}\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)}\right]$$

Expresia e nedeterminată pentru $n = 0$ şi $n = 1$.

Avem $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\varphi \cos\varphi dx + \frac{2}{\pi}\int_\varphi^\pi \cos x dx = \frac{2}{\pi}[\varphi\cos\varphi - \sin\varphi]$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\varphi \cos\varphi \cdot \cos x dx + \frac{2}{\pi}\int_\varphi^\pi \cos^2 x dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}[\sin\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{1}{2}(\pi - \varphi) - \frac{1}{4}\sin 2\varphi] = \frac{1}{\pi}[\pi - \varphi + \sin\varphi \cdot \cos\varphi]$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1}{\pi}(\pi - \varphi + \sin\varphi \cdot \cos\varphi)\cos x +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)}\right]\cos nx$$

9. Să se dezvolte în serie de sinusuri funcţia $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definită în intervalul (0,l).

Soluţie. Prelungim funcţia f impar faţă de origine

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 < x < l \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } -l < x < 0 \end{cases}$$

Calculăm coeficienţii Fourier ai acestei funcţii periodice impare definite pe intervalul (-l,l):

$$a_n = 0, \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l 1 \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n+1}, & \text{dacă } n = 2k+1 \\ 0, & \text{dacă } n = 2k \end{cases}$$

Atunci $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}$

10. Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & \text{dacă } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x - \cos x, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Soluţie. Observăm că

$$f_1(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_2(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Deci $f_1(x) = f_2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

De aceea dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcţiei f coincide cu dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcţiei f_1 definită pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$.

Prelungim funcţia f_1 par faţă de origine şi obţinem coeficienţii Fourier:

$b_n = 0, \forall n \geq 1$

$a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x + \frac{\pi}{4})dx = \frac{4}{\pi}$

$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos 2nx dx = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{1-4n^2} =$

$$= \begin{cases} \frac{8}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}, & \text{dacă } n = 2k \\ 0, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$$

Atunci $f(x) = \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{1-16n^2}$

11. Să se dezvolte funcţia $f(x) = \cos ax$ după sinusuri în intervalul $[0, \pi]$, $a \neq 0$.

Soluţie. Se prelungeşte prin imparitate în intervalul $(-\pi, 0)$.

Avem $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(a+n)x + \sin(n-a)x]dx$

Pentru $|a| = n \Longrightarrow b_n = 0$.Pentru $|a| \neq n \Longrightarrow b_n = \frac{2n}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2-a^2} \cdot$ $\cdot [1 - (-1)^n \cos a\pi]$

Dacă $|a|$ nu e natural, atunci $b_{2k-1} = \frac{2(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2-a^2]}(1 + \cos a\pi)$ şi $b_{2k} = \frac{4k}{\pi(4k^2-a^2)}(1 - \cos a\pi), k \in \mathbb{N}$ astfel că

$\cos ax = \frac{2}{\pi}(1 + \cos a\pi)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - a^2} \sin(2k-1)x +$

$+\frac{2}{\pi}(1 - \cos a\pi)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2 - a^2} \sin 2kx$

Dacă $a = 2m$, atunci $b_{2k-1} = \frac{4(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2-4m^2]}, b_{2k} = 0$ şi

$\cos 2mx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - 4m^2} \sin(2k-1)x, x \in [0, \pi]$

Dacă $a = 2m-1$, atunci $b_{2k-1} = 0, b_{2k} = \frac{8k}{\pi[4k^2-(2m-1)^2]}$ şi

$\cos(2m-1)x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - (2m-1)^2} \sin 2kx, x \in [0, \pi]$

12. Să se dezvolte în serie Fourier $f(x) = 10 - x$ în $(5, 15)$.

Soluţie. $a_0 = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10 - x)dx = 0$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10 - x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{1}{n\pi}(10 - x)\sin\frac{n\pi x}{5}/_5^{15} +$$
$$+\frac{1}{n\pi}\int_5^{15}\sin\frac{n\pi x}{5}dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10 - x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = -\frac{1}{n\pi}(10 - x)\cos\frac{n\pi x}{5}/_5^{15} -$$
$$-\frac{1}{n\pi}\int_5^{15}\cos\frac{n\pi x}{5}dx = (-1)^n\frac{10}{n\pi}$$

Atunci $f(x) = \frac{10}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$

13. Să se demonstreze formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \ \forall x \in (0, 2\pi).$$

Soluţie. Fie $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi)$, prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}$; calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{(\pi - x) \sin nx}{2n\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0, \forall \, n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{-(\pi - x) \cos nx}{2n\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n}, \forall \, n \geq 1.$$

Aplicând teorema lui Dirichlet, rezultă :

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \ \forall x \in (0, 2\pi).$$

In punctele $x = 0$ şi $x = 2\pi$ funcţia f nu este continuă ; în aceste puncte seria trigonometrică asociată ei are suma 0.

14. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin 2nx}{2n} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \ \forall \, x \in (0, \pi).$$

Soluţie. Din formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \ \forall x \in (0, 2\pi),$$

demonstrată în exerciţiul precedent, înlocuind pe x cu $2x$, rezultă identitatea:

$$\frac{\pi - 2x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin 2nx}{n}, \ \forall \, x \in (0, \pi).$$

Impărţind acum cu 2, rezultă egalitatea cerută.

15. Să se demonstreze identităţile:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4},\ \forall x \in (0,\pi)$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{\pi}{4},\ \forall x \in (-\pi,0).$$

Să se calculeze apoi suma seriei:

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - ...$$

Soluţie. Pentru prima identitate se scad membru cu membru cele două egalităţi demonstrate în exerciţiile precedente; a doua identitate rezultă din prima şi din imparitatea funcţiei sinus. Pentru a calcula suma seriei numerice date, se ia $x = \frac{\pi}{3}$ în prima egalitate şi obţinem:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{3}}{2n-1},$$

de unde rezultă : $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - ... = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

16. (**Fenomenul Gibbs**) In jurul unui punct de discontinuitate al unei funcţii date, seria Fourier asociată ei converge doar punctual (nu neapărat uniform). Acest fapt conduce la un defect de convergenţă (aparent paradox) al şirului sumelor parţiale asociat seriei trigonometrice date, numit fenomenul Gibbs. Dăm în continuare un exemplu în acest sens.
Considerăm restricţia funcţiei signum la intervalul $(-\pi,\pi)$,

$$\text{sgn} : (-\pi,\pi) \mapsto \mathbb{R},\ \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & ,\ x \in (-\pi,0) \\ 0 & ,\ x = 0 \\ 1 & ,\ x \in (0,\pi) \end{cases}$$

In exerciţiul anterior s-a demonstrat egalitatea:

$$\text{sgn}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\ \forall\, x \in (-\pi,\pi).$$

Notăm cu S_n şirul sumelor parţiale:

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\ \forall\, x \in (-\pi,\pi).$$

In punctul $x = 0$ funcţia sgn nu este continuă ; seria sa Fourier converge (conform teoremei lui Dirichlet) la $\frac{1}{2}(-1+1) = 0 = \text{sgn}(0)$;

convergenţa $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $\forall\, x \in (-\pi, \pi)$ este punctuală, nu şi uniformă.

a. Să se demonstreze egalitatea:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt,\ \forall\, x \in (-\pi, \pi).$$

b. Să se arate că funcţia S_n are un maxim în punctul $x = \frac{\pi}{2n}$ şi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 1,1789.$$

c. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \operatorname{sgn}(0+)\right|.$$

Soluţie. **a.** Calculăm mai întâi suma

$$A = \cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x,\ \forall\, x \neq k\pi,\ k \in Z.$$

Pentru aceasta, considerăm şi suma $B = \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x$ şi calculăm:

$$A + iB =$$

$$= (\cos x + i\sin x) + (\cos 3x + i\sin 3x) + ... + (\cos(2n-1)x + i\sin(2n-1)x) =$$

$$= z^2\frac{z^{2n}-1}{z^2-1},$$

unde am notat $z = \cos x + i\sin x$. După calcule, rezultă :

$$A + iB = \frac{\sin nx}{\sin x}(\cos nx + i\sin nx),$$

şi deci:

$$\cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x},\ \forall\, x \neq k\pi,\ k \in Z.$$

Integrând de la 0 la x, rezultă :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{2\sin t}\, dt,$$

sau, înmulţind cu $\frac{4}{\pi}$:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt,\ \forall\, x \in (-\pi, \pi).$$

b. Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi\sin x}$$

şi deci $\frac{\pi}{2n}$ este punct critic al lui S_n; într-o vecinătate a lui $\frac{\pi}{2n}$ avem:

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x} > 0,\ x < \frac{\pi}{2n},$$

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x} < 0,\ x > \frac{\pi}{2n}.$$

Rezultă că $x = \frac{\pi}{2n}$ este punct de maxim al funcţiei S_n.
Calculăm acum:

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\frac{du}{2n} = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\,du.$$

Rezultă :

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

Ultima integraă se aproximează dezvoltând funcţia sinus în serie de puteri:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^{\pi}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\,x^{2n-2}\right)du =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n-1)} x^{2n-1}\Bigg|_0^{\pi} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$$

Seria fiind alternată, eroarea este mai mică decât primul termen neglijat. Cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \approx 1,1789.$$

c. Rezultă : $\lim\limits_{n\to\infty} \left|S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \mathrm{sgn}(0+)\right| \approx 0,1789.$

17. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. f e pară, deci $b_k = 0, k > 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(s-a făcut schimbarea de variabilă $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$)

Fie $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (1)

Inmulţim ambii membri ai egalităţii (1) cu $2(2+\cos x)$ şi obţinem:

$$2 = 2a_0 + a_0\cos x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos x \cos nx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 = 2a_0 + a_0\cos x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x]$$

Funcţia $g(x) = 2$ poate fi considerată ca o funcţie pară, deci dezvoltabilă în serie Fourier de cosinusuri pe toată axa reală. Tinând seama de egalitatea a două serii Fourier obţinem:

$$2 = 2a_0 + a_1$$

$$0 = a_0 + 4a_1 + a_2$$

$$0 = 4a_k + a_{k+1} + a_{k-1}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$

Sirul a_k este un şir ce verifică relaţia de recurenţă lineară

$$a_k = -4a_{k-1} - a_{k-2}$$

cu $a_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ şi $a_1 = 2 - 2a_0 = \frac{6-4\sqrt{3}}{3}$

Ecuaţia caracteristică ataşată este $r^2 + 4r + 1 = 0$ cu soluţiile
$r_1 = -2 + \sqrt{3}, r_2 = -2 - \sqrt{3}$

Atunci $a_k = c_1(-2-\sqrt{3})^k + c_2(-2+\sqrt{3})^k$, constantele c_1, c_2 determinându-se din a_0 şi a_1. Deci obţinem sistemul:

$$c_1 + c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$c_1(-2-\sqrt{3}) + c_2(-2+\sqrt{3}) = \frac{6-4\sqrt{3}}{3}$$

Aşadar, $c_1 = 0$ şi $c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

a_k va fi de forma $a_k = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-2)^k$

Deci $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{3}-2)^n \cos nx$

18. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \ln(2 + \cos x)$.

Soluţie. Prin derivare obţinem

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Cum f' este o funcţie impară, ea este dezvoltabilă în serie Fourier de sinusuri, adică

$$\frac{-\sin x}{2 + \cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

sau

$$-\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \sin nx + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]$$

Tinând seama de egalitatea a două serii Fourier obţinem

$$-1 = 2b_1 + \frac{1}{2}b_2$$

$$0 = 2b_k + \frac{1}{2}b_{k-1} + \frac{1}{2}b_{k+1}(*)$$

Dar $b_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{8t^2}{(1+t^2)^2(t^2+3)}dt$(am făcut schimbarea $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$)

Descompunem în fracţii simple şi obţinem:

$$b_1 = -\frac{16}{\pi}\left[-\frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+3} + \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2}\right] =$$
$$= -\frac{16}{\pi}\left(-\frac{3}{4}\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{4}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right) = 2(\sqrt{3} - 2)$$

Atunci $b_2 = -2 - 4b_1 = 2(7 - 4\sqrt{3})$

Ecuaţia caracteristică a şirului (*) este:

$$t^2 + 4t + 1 = 0$$

cu rădăcinile $t_1 = -2 - \sqrt{3}, t_2 = -2 + \sqrt{3}$

Deci

$$b_k = c_1(-2 - \sqrt{3})^{k-1} + c_2(-2 + \sqrt{3})^{k-1}$$

c_1 şi c_2 determinându-se din sistemul

$$2(\sqrt{3} - 2) = c_1 + c_2$$

$$2(7-4\sqrt{3}) = -2(c_1+c_2) - \sqrt{3}(c_1+c_2)$$

Soluţiile sistemului sunt $c_1 = 0, c_2 = \sqrt{3}-2$

Deci $b_k = 2(\sqrt{3}-2)^k$

Atunci avem

$$-\frac{\sin x}{2+\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(\sqrt{3}-2)^n \sin nx$$

Integrând între 0 şi x obţinem:

$$\ln(2+\cos x) - \ln 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3}-2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3}-2)^n}{n} \cos nx$$

Dar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3}-2)^n}{n} = -\ln(3-\sqrt{3})$

Atunci $\displaystyle\ln(2+\cos x) = \ln 3 - \ln(3-\sqrt{3}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3}-2)^n}{n} \cos nx.$

19. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^n \frac{\sin x}{n^3+x^3} dx$$

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x = nt$ în integrala $b_n = n^2 \int_0^n \frac{\sin x}{n^3+x^3} dx$ şi obţinem $b_n = \int_0^1 \frac{\sin nt}{1+t^3} dt$

Funcţia $f(t) = \frac{1}{1+t^3}$ e continuă pe [0,1] şi b_n fiind coeficientul ei Fourier şi seria Fourier fiind convergentă, rezultă $b_n \longrightarrow 0$, când $n \longrightarrow \infty$

20. Fie $0 < u < 1$ şi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodică astfel încât $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(ux)$.

a) Calculaţi coeficienţii Fourier ai lui f;

b) Calculaţi $\displaystyle g(u) = \sum_{n\geq 1} \frac{2u}{u^2-n^2}$

c) $\forall t \in [0,1]$, calculaţi $I(t) = \int_0^t g(u) du$

Soluţie. a) f este funcţie pară deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(ux) du = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(n+u)x + \cos(n-u)x] du =$
$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n+u)\pi}{n+u} - \frac{\sin(u-n)\pi}{n-u}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{2u}{n^2-u^2} \cdot \sin \pi u$

Deoarece f e continuă, de clasă $\mathcal{C}^1$, atunci seria sa Fourier converge uniform pe $\mathbb{R}$ şi are suma f. Deci pentru $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos(ux) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{2u}{n^2-u^2} \cdot \sin \pi u \cdot \cos(nx)$$

b) Inlocuim x cu π în formulă şi obţinem $\cos(\pi u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u} - \frac{1}{\pi}\cdot$
$\cdot\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{2u}{n^2-u^2}\cdot \sin \pi u = \dfrac{\sin \pi u}{\pi u} + \dfrac{g(u)\sin \pi u}{\pi} / : \sin \pi u \Longrightarrow \operatorname{ctg} \pi u =$
$= \frac{1}{\pi u} + \frac{g(u)}{\pi} \Longrightarrow g(u) = \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{u}$

c) g e continuă pe (0,1) şi se prelungeşte prin continuitate în 0 prin $g(0) = 0$

Dacă $\alpha \in (0,t)$ putem scrie $\int_0^t g(u)du = \lim\limits_{\alpha\to 0}\displaystyle\int_\alpha^t \left(\pi \cdot \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{u}\right) du =$
$= \lim\limits_{\alpha\to 0}[\ln(\sin \pi u) - \ln u]/_\alpha^t = \lim\limits_{\alpha\to 0} \ln \left(\dfrac{\sin \pi t}{t}\right) - \ln \left(\dfrac{\sin \pi \alpha}{\alpha}\right) =$
$= \ln\left(\frac{\sin \pi t}{t}\right) - \ln \pi = \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) \Longrightarrow \int_0^t g(u)du = \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)$

21. Fie f şi F două funcţii de pătrat integrabile definite pe $[-\pi, \pi]$ şi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

seriile Fourier ataşate lor. Să se arate că

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n)$$

Soluţie. Seriile Fourier ataşate funcţiilor $f + F$ şi $f - F$ sunt

$$f(x) + F(x) = \frac{a_0 + A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + A_n)\cos nx + (b_n + B_n)\sin nx]$$

$$f(x) - F(x) = \frac{a_0 - A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - A_n)\cos nx + (b_n - B_n)\sin nx]$$

Deoarece f şi F sunt funcţii de pătrat integrabile, atunci şi $f + F$ şi $f - F$ sunt funcţii de pătrat integrabile.

Egalitatea lui Parseval ne conduce la:

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) + F(x)]^2dx = \frac{(a_0+A_0)^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}[(a_n + A_n)^2 + (b_n + B_n)^2]$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - F(x)]^2dx = \frac{(a_0-A_0)^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}[(a_n - A_n)^2 + (b_n - B_n)^2]$

Scăzând cele două egalităţi obţinem:

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = 4\left[\frac{a_0 A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n A_n + b_n B_n)\right] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n A_n + b_n B_n)$$

22. Să se demonstreze egalitatea:

$\sec x = \frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(1+\sqrt{2}) + 2\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]\cdot$
$\cdot \cos 4nx$, pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Soluţie. Funcţia $f(x) = \sec x$ verifică pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ condiţiile Teoremei 10.3. Deoarece f este pară avem:

$a_0 = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{1+t^2})/_0^1 =$
$= \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$

Pentru calculul lui a_n folosim identitatea

$\frac{\cos 4nx}{\cos x} = 2\cos(4n-1)x - 2\cos(4n-3)x + \frac{\cos(4n-1)x}{\cos x}$

De unde integrând obţinem

$a_n = \frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{4n-1}\sin(4n-1)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4n-3}\sin(4n-3)\frac{\pi}{4}\right] + a_{n-1}$

De aici deducem

$a_k - a_{k-1} = \frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{4k-1}\sin(4k-1)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4k-3}\sin(4k-3)\frac{\pi}{4}\right]$

Insumând obţinem

$a_n = \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4} + a_0$

Aşadar, dezvoltarea în serie Fourier pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ a funcţiei f este

$\sec x = \frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(1+\sqrt{2}) + 2\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]\cdot$
$\cdot \cos 4nx$

23. Să se arate că dacă $f(x)$ este suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^2-1}$, atunci f verifică ecuaţia diferenţială $f''(x) + f(x) = -\sin x$ şi să se găsească apoi suma.

Soluţie. Fie $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, atunci

$f'(x) = \frac{c}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}[(nb_n + (-1)^n c)\cos nx - na_n \sin nx]$, unde

$c = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = \lim\limits_{n\to\infty}[(-1)^{n+1}nb_n]$

In cazul nostru $c = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{n^2}{n^2-1}\right) = -1$

Obţinem $f'(x) = -\frac{1}{2} + \cos x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\cos nx}{n^2-1}$

Făcând un raţionament analog obţinem

$f''(x) = -\sin x - \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n \sin nx}{n^2-1}$

şi se verifică astfel relaţia din ipoteză.

Pentru calculul sumei observăm că soluţia generală a ecuaţiei este $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x\cos x}{2}$

Pentru a calcula c_1 facem $x = 0$ şi avem $f(0) = c_1$, dar $f(0) = 0$, deci $c_1 = 0$

Derivând f şi ţinând seama de dezvoltarea sa în serie obţinem

$c_2 \cos x + \frac{\cos x}{2} - \frac{x \sin x}{2} = -\frac{1}{2} + \cos x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\cos nx}{n^2-1}$

Facem $x = 0$ şi obţinem $c_2 = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{4}$

Deci $f(x) = \frac{\sin x}{4} + \frac{x\cos x}{2}$.

18.11 Funcţii definite prin integrale

1. Să se calculeze:

$$\lim_{y\to 0} \int_0^2 x^2 \cos xy dx, y \in \mathbb{R}.$$

Soluţie

Dacă notăm cu $f(x,y) = x^2 \cos xy, x \in [0,1], y \in \mathbb{R}$, şi cu $F(y) = \int\limits_0^2 f(x,y)\,dx, y \in \mathbb{R}$, atunci din teorema de continuitate deducem că F este continuă pe $\mathbb{R}$. Rezultă că:

$$\lim_{y\to 0} F(y) = F(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

2. Fie $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ şi $F(y) = \int_{ay}^{by} f(x+y, x-y)\, dx, y \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$.
Să se calculeze $F'(y)$.

Soluţie

Din teorema de derivare a lui Leibniz rezultă:

$$F'(y) = \int_{ay}^{by} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+y, x-y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x+y, x-y)\right] dx +$$

$$+ b \cdot f(by+y, by-y) - a \cdot f(ay+y, ay-y), y \in \mathbb{R}$$

3. Să se calculeze:

$$F(y) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x} dx, \ |y| < 1.$$

Soluţie

Notăm cu $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}, |y| < 1$.

Observăm că $\int_0^{\pi} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx = \int_0^{\pi} \dfrac{1}{1+y\cos x} dx$ este uniform convergentă pe orice interval $(a,b) \subset (-1,1)$, deci pe $(-1,1)$.

Într-adevăr, dacă $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, atunci $\cos x \geq 0$ şi

$$0 < \frac{1}{1+y\cos x} \leq \frac{1}{1+a\cos x}, \text{pentru } 1 < a < y < b < 1.$$

Cum $\int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+a\cos x}$ este o integrală proprie, rezultă că $\int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+y\cos x}$ este uniform convergentă pe (a,b).

În mod analog avem:

$$0 < \frac{1}{1+y\cos x} < \frac{1}{1+b\cos x}, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], y \in (a,b).$$

Rezultă că $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+y\cos x}$ este uniform convergentă pe (a,b).

Din teorema de derivare rezultă că

$$F^{'}(y) = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1+y\cos x} dx, y \in (-1,1).$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, rezultă:

$$F^{'}(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+y\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{(1-y)\,t^2+1+y} =$$

$$= \frac{2}{1-y}\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+\frac{1+y}{1-y}} = \frac{2}{1-y} \cdot \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}.$$

În continuare avem:

$$F(y) = \pi \arcsin y + C.$$

Cum $F(0)=0$ deducem că $C=0$ şi deci $F(y)=\pi\arcsin y, y \in (-1,1)$.

4. Să se calculeze:

$$F(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(y^2 - \sin^2 x\right) dx, y \in (1,\infty).$$

Soluţie

Dacă notăm cu $f(x,y) = \ln\left(y^2-\sin^2 x\right), y > 1$ atunci

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial y} dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2y}{y^2-\sin^2 x} dx.$$

Observăm că $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{y^2 - \sin^2 x}$ este uniform convergentă pe intervalul (a, ∞) dacă $a > 1$.

Într-adevăr, $\frac{1}{y^2 - \sin^2 x} < \frac{1}{a^2 - \sin^2 x}, \forall 1 < a < y$ şi $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x}$ este integrală proprie.

Din teorema de derivare rezultă:

$$F'(y) = 2y \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{y^2 - \sin^2 x}.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $\mathrm{tg} x = t$, obţinem:

$$F'(y) = 2y \cdot \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{y^2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2y \cdot \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{(y^2-1)\, t^2 + y^2} =$$

$$= \frac{2y}{y^2-1} \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{y^2}{y^2-1}} = \frac{2y}{y^2-1} \cdot \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \mathrm{arctg} \frac{t}{\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Mai departe avem:

$$F(y) = \pi \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) + C.$$

Pentru a determina constanta C, scriem funcţia F sub forma echivalentă:

$$F(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln y^2 \left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln y^2 dx + \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dx =$$

$$= \pi \ln y + \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dx.$$

În continuare avem:

$$C = F(y) - \pi \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = \pi \ln \frac{y}{y + \sqrt{y^2-1}} + \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dx.$$

Cum $\lim\limits_{y\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right) dx = 0$, deducem că

$$C = \pi \lim_{y\to\infty} \ln \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} = \pi \ln \frac{1}{2} = -\pi \ln 2.$$

Aşadar, $F(y) = \pi \ln \dfrac{y + \sqrt{y^2-1}}{2}, y \in (1, \infty)$.

5. Să se arate că $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ este convergentă şi să se calculeze.

Soluţie

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{1/2}^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} = 1$, $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ este convergentă.

Pe de altă parte, $\lim\limits_{x\nearrow 1} \dfrac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

Cum $\int\limits_{1/2}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ este convergentă, rezultă că $\int\limits_{1/2}^1 \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ este convergentă. Aşadar $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ este convergentă.

Pentru a o calcula considerăm următoarea funcţie:

$$F(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(yx)}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \ y \in \mathbb{R}.$$

Dacă notăm cu $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{arctg}(yx)}{x\sqrt{1-x^2}}$, atunci

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + y^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, y \in \mathbb{R}.$$

Cum $\dfrac{1}{(1 + y^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}$ şi $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\pi}{2}$ este convergentă, rezultă că $\int\limits_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial y} dx$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, deci se poate aplica teorema de derivare. Rezultă:

$$F^{'}(y)=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(1+y^2x^2)\sqrt{1-x^2}},y\in\mathbb{R}.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x=\sin t$, obţinem

$$F^{'}(y)=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\cos t dt}{\left(1+y^2\sin^2 t\right)\cdot\cos t}=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dt}{1+y^2\sin^2 t}.$$

Făcând schimbarea de variabilă tg$t=u$ obţinem:

$$F^{'}(y)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{1+y^2\cdot\frac{u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{du}{1+u^2}=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{du}{1+(1+y^2)\,u^2}=$$

$$=\frac{1}{1+y^2}\cdot\int\limits_{0}^{\infty}\frac{du}{u^2+\frac{1}{1+y^2}}=\frac{1}{1+y^2}\cdot\sqrt{1+y^2}\operatorname{arctg}\left(u\sqrt{1+y^2}\right)\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$$

În continuare rezultă:

$$F(y)=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+C.$$

Cum $F(0)=0$, deducem că $C=0$.

Aşadar $F(y)=\dfrac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ şi

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{y\to1}F(y)=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

6. Folosind proprietatea de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze integrala

$$I(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\operatorname{tg}x}\operatorname{arctg}(y\operatorname{tg}x)\,dx,\ y\geq 0.$$

Soluţie. Fie $f(x,y)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\operatorname{arctg}(y\operatorname{tg}x)$ pentru $x\neq 0$, $f(0,y)=y$ şi $f(\frac{\pi}{2},y)=0$. Funcţia f este derivabilă în raport cu y pentru orice

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi $f_y^{'} = \dfrac{1}{1+y^2 \mathrm{tg}^2 x}$ pentru $x \neq 0$, $f_y^{'}(0,y) = 1$, $f_y^{'}(\frac{\pi}{2}, y) = 0$. Derivata este continuă în raport cu ambele variabile pentru $y \neq 0$ şi $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Folosind derivarea în raport cu parametrul şi utilizând substituţia $\mathrm{tg}\, x = t$, obţinem

$$I^{'}(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^2 \mathrm{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Descompunând în fracţii rationale simple, se obţine

$$I^{'}(y) = \frac{y^2}{y^2-1} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2t^2}\, dt + \frac{1}{1-y^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \frac{y}{y^2-1} \mathrm{arctg}\,(yt)|_0^{\infty} + \frac{1}{1-y^2} \mathrm{arctg}\, t|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+y}.$$

Prin integrare, obţinem $I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1+y) + C$. Făcând pe $y \to 0$, obţinem $I(0) = C$ şi cum din definiţie $I(0) = 0$, rezultă $C = 0$.

Deci, $I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1+y)$.

7. Utilizând funcţiile B şi Γ, să se calculeze următoarele integrale:

$$\text{a) } I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}}; \quad \text{b) } I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\, dx.$$

Soluţie. a) Folosim schimbarea de variabilă $x^6 = t$. Avem $x = t^{\frac{1}{6}}$, $dx = \frac{1}{6} t^{\frac{1}{6}-1} dt$, iar integrala devine

$$I_1 = \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{6} t^{\frac{1}{6}-1} dt = \frac{1}{6} \mathrm{B}\left(\frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}.$$

b) Folosim schimbarea de variabilă $\dfrac{1}{1+x} = t$. Avem $x = \dfrac{1-t}{t}$, $dx = -\dfrac{1}{t^2} dt$ şi integrala devine

$$I_2 = \int_1^0 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot t^2 \cdot \frac{-1}{t^2}\, dt = \int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} (1-t)^{\frac{1}{4}}\, dt$$

$$= \mathrm{B}\left(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

18.12 Integrala curbilinie

1. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} xyds,$$

unde γ este porţiunea din primul cadran a elipsei $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Soluţie

O reprezentare parametrică a arcului de curbă γ este:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Conform definiţiei integralei curbilinii de speţa I, avem:

$$\int_{\gamma} xyds = \int_{0}^{\pi/2} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\, dt.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă
$u = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$, $\quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obţinem:

$$\int_{\gamma} xyds = \frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_{b^2}^{a^2}\sqrt{u}du = \frac{ab}{3\left(a^2-b^2\right)}u^{3/2}\Big|_{b^2}^{a^2} = \frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3\left(a+b\right)}$$

2. Să se calculeze

$$\oint_{\gamma} \left(2y^2-4y+x\right)dx + 4x\left(y-1\right)dy$$

unde γ este cercul de ecuaţie $x^2+y^2-2y=0$.

Soluţie

Dacă notăm cu $P\left(x,y\right) = 2y^2-4y+x$ şi cu $Q\left(x,y\right) = 4x\left(y-1\right)$, atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y-4 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Rezultă că $V(x,y) = \left(2y^2 - 4y + x, 4x(y-1)\right)$ este un câmp de gradienţi. Cum γ este o curbă închisă, rezultă că $\oint\limits_{\gamma} V dr = 0$.

3. Să se calculeze:

$$\oint\limits_{\gamma_+} ydx + zdy + xdz,$$

unde γ_+ este cercul $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y = R \end{cases}$, parcurs în sens invers acelor unui ceasornic, dacă privim din centrul sferei.

Soluţie

Eliminând y între ecuaţiile curbei γ obţinem

$x^2 - Rx + \dfrac{z^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$,

sau $\left(x - \dfrac{R}{2}\right)^2 + \dfrac{z^2}{2} = \dfrac{R^2}{4}$.

Notând $x - \dfrac{R}{2} = \dfrac{R}{2}\cos t$ şi $z = \dfrac{R}{\sqrt{2}}\sin t$, obţinem următoarea reprezentare parametrică a curbei γ_+:

$$\begin{cases} x = \dfrac{R}{2}(1 + \cos t) \\ y = \dfrac{R}{2}(1 - \cos t) \\ z = \dfrac{R}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

În continuare avem:

$$\oint\limits_{\gamma_+} ydx + zdy + xdz =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{R}{2}(1 - \cos t)\left(-\frac{R}{2}\sin t\right) + \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t\left(\frac{R}{2}\sin t\right) + \frac{R}{2}(1 + \cos t)\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t\right)\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R^2}{4}\sin t + \frac{R^2}{4}\sin t\cos t + \frac{R^2}{2\sqrt{2}}\sin^2 t + \frac{R^2}{2\sqrt{2}}\cos t + \frac{R^2}{2\sqrt{2}}\cos^2 t\right) dt =$$

$$= \left(\frac{R^2}{4}\cos t + \frac{R^2}{8}\sin^2 t + \frac{R^2}{2\sqrt{2}} t + \frac{R^2}{2\sqrt{2}}\sin t \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$$

4. Să se arate că $V = \left(y\cos xy, x\cos xy + 2yz^3, 3y^2z^2\right)$ este un câmp de gradienţi. Să se determine o funcţie f astfel încât $V = \nabla f$ şi să se calculeze

$$\int_A^B y\cos xy dx + \left(x\cos xy + 2yz^3\right)dy + 3y^2z^2 dz,$$

unde $A\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$ şi $B(0,2,1)$.

Soluţie

Notăm cu $P(x,y,z) = y\cos xy$, $Q(x,y,z) = x\cos xy + 2yz^3$,
$R(x,y,z) = 3y^2z^2$.

Constatăm ca:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 6yz^2 = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos xy - xy\sin xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

deci V este un câmp de gradienţi. Din egalitatea

$$V = \nabla f$$

deducem că:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy + 2yz^3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3y^2z^2.$$

Integrând prima relaţie în raport cu x obţinem:
$f(x,y,z) = \sin xy + g(y,z)$, unde g este o funcţie oarecare de clasă C^1.
Ţinând seama de a doua relaţie rezultă

$$x\cos xy + \frac{\partial g}{\partial y} = x\cos xy + 2yz^3$$

şi, mai departe, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2yz^3$. Integrând în raport cu y obţinem:
$g(y,z) = y^2 z^3 + h(z)$, unde h este o funcţie arbitrară de clasă C^1.
Aşadar, $f(x,y,z) = \sin xy + y^2 z^3 + h(z)$.
În sfârşit, din a treia relaţie deducem:

$$3y^2 z^2 + h'(z) = 3y^2 z^2$$

Rezultă că $h'(z) = 0$, deci $h(z) = C$ şi funcţia cerută este

$$f(x,y,z) = \sin xy + y^2 z^3 + C$$

$\int\limits_{\widehat{AB}} V dr$ depinde numai de capetele arcului, deci are sens

$$\int_A^B V dr = f(B) - f(A) = 4 + C - 1 - C = 3$$

5. Să se calculeze

$$\int\limits_{\triangle ABC} (z-y)\,dx + (x-z)\,dy + (y-x)\,dz$$

unde $A(a,0,0)\,,\ B(0,b,0)\,,\ C(0,0,c)\,,\quad a>0,\ b>0,\ c>0$

Soluţie

Ecuaţiile parametrice ale segmentului de dreaptă $[AB]$ sunt:

$$\begin{cases} x &= a(1-t) \\ y &= bt \\ z &= 0 \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

Rezultă că:

$$\int\limits_{AB} (z-y)\,dx + (x-z)\,dy + (y-x)\,dz = \int_0^1 (-bt(-a) + a(1-t)b)\,dt = ab$$

În mod analog, $[BC]$ are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= b(1-t) \\ z &= ct \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

şi

$$\int\limits_{BC} = \int\limits_0^1 \left(-ct\,(-b) + b\,(1-t)\,c\right) dt = bc.$$

În sfârşit, $[CA]$ are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x &= & at \\ y &= & 0 \\ z &= & c\,(1-t) \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

şi $\int\limits_{CA} = ac.$

În final avem:

$$\int\limits_{\triangle ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} = ab + bc + ac$$

6. Să se calculeze integrala

$$I = \int_\gamma (x^2 + y^2) \ln z \, ds$$

unde γ este dată parametric prin $\gamma : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases} ; \quad t \in [0,1].$

Soluţie. Avem $x^{'} = e^t \cos t - e^t \sin t$, $y^{'} = e^t \sin t + e^t \cos t$ şi $z^{'} = e^t$.
$ds = \sqrt{(x^{'})^2 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}$
$= e^t \sqrt{\cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + 1} = e^t \sqrt{3}.$
Prin urmare

$$I = \int_0^1 (e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t) \ln e^t \cdot e^t \sqrt{3}\, dt = \sqrt{3} \int_0^1 t e^{3t}\, dt$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 t \left(\frac{e^{3t}}{3}\right)^{'} dt = \sqrt{3} t \frac{e^{3t}}{3} \Big|_0^1 - \sqrt{3} \int_0^1 \frac{e^{3t}}{3}\, dt = \frac{\sqrt{3}e^3}{3} - \frac{\sqrt{3}e^{3t}}{9} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}e^3}{3} - \frac{\sqrt{3}e^3}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9}(2e^3 + 1).$$

7. Să se calculeze integrala curbilinie de tipul doi

$$I = \int_\gamma \sqrt{1 - x^2} dx + x dy$$

unde γ este porţiunea din elipsa de ecuaţie $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, corespunzătoare restricţiei $x \geq 0$ şi parcursă în sens direct.

Soluţie. O reprezentare parametrică a curbei este

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} ; \quad t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}].$$

Aplicând formula de calcul pentru integrala de tipul doi obţinem:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t + 2\cos^2 t)\,dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\sin t\,dt + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

Prima integrala este 0 deoarece funcţia de sub integrala este impară, iar pentru a doua, folosim formula $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$. Prin urmare

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = (t + \frac{\sin 2t}{2})|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

8. Să se calculeze următoarea integrală, arătând în prealabil că este independentă de drum.

$$I = \int_{\widehat{AB}} yzdx + xzdy + xydz; \quad A(1,1,0),\ B(2,3,1).$$

Soluţie. Deoarece $V_1 = yz$, $V_2 = xz$, $V_3 = xy$ şi

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = z, \ \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y} = x, \ \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z} = y,$$

rezultă că integrala este independentă de drum.

Rezultă că un potenţial scalar este

$$f(x,y,z) = \int_0^1 (x\cdot tytz + y\cdot txtz + z\cdot txty)\,dt = xyz\int_0^1 3t^2\,dt = xyz.$$

Prin urmare $I = f(2,3,1) - f(1,1,0) = 6$.

9. Densitatea de masă a unei sârme semicirculare de rază a variază proporţional cu distanţa faţă de diametrul care uneşte cele două capete ale sârmei.

   (a) Determinaţi masa sârmei;

   (b) Stabiliţi coordonatele centrului de masă.

Soluţie.

Firul poate fi parametrizat prin

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j},\ t \in [0,\pi],$$

iar densitatea de masă este de forma $\lambda(x, y) = ky$.

Întrucât $\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j}$, obţinem $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = a$.

(a) Masa sârmei este dată de:

$$M = \int_C \lambda(x, y)\, ds = \int_C ky\, ds = \int_0^\pi ky(t)s'(t)\, dt = \int_0^\pi k(a\sin t)a\, dt$$

$$= ka^2 \int_0^\pi \sin t\, dt = 2ka^2.$$

(b) Datorită simetriei configuraţiei, $x_M = 0$.

$$y_M M = \int_C y\lambda(x, y)\, ds = \int_C ky^2\, ds = \int_0^\pi [ky(t)]^2 s'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\pi k(a\sin t)^2 a\, dt = ka^3 \int_0^\pi \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}ka^3\pi.$$

Întrucât $M = 2ka^2$, rezultă $y_M = (\frac{1}{2}ka^3\pi)/(2ka^2) = \frac{1}{4}a\pi$.

Deci, centrul de masă se află pe mediana firului, la distanţa $\frac{1}{4}a\pi$ de diametru.

18.13 Integrala dublă şi integrala triplă

1. Să se calculeze

$$\iint\limits_K xdxdy,$$

unde $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 \le x \le 1, 2x \le y \le x^2 + 1 \right\}$

Soluţie

$$\iint\limits_K xdxdy = \int_0^1 dx \int_{2x}^{x^2+1} xdy = \int_0^1 \left(x^3 + x + 2x^2\right) dx = \frac{5}{12}$$

2. Să se calculeze

$$\iint\limits_\Omega \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$

unde $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3} \right\}.$

Soluţie

Fie $W = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \times [0,a]$ şi $\phi : W \to \Omega$ schimbarea de variabile

$$\phi(t,r) = (r\cos t, r\sin t).$$

Cum $\det \phi'(t,r) = r$, rezultă că

$$\iint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint\limits_{W} r^2 \cdot r dr dt = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} dt \int\limits_{0}^{a} r^3 dr = \frac{\pi a^4}{24}$$

3. Să se calculeze

$$I = \iint_D xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, dxdy$$

pe domeniul dreptunghiular $D = [0,1] \times [0,1]$.

Soluţie. Avem $I = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, dy$.

$\int_0^1 xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, dy = \frac{x}{2}\int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(1+x^2+y^2)'_y\, dy$

$= \frac{x}{2} \cdot \frac{(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}|_0^1 = -x(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}|_0^1 = -x(2+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Deci $I = \int_0^1 \left(x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)' dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2+x^2)' dx$

$= \sqrt{1+x^2}|_0^1 - \sqrt{2+x^2}|_0^1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1.$

4. Să se calculeze

$$\iint_D xy\, dxdy$$

domeniul D fiind mărginit de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = 2x+3$.

Soluţie. Intersectăm parabola $y = x^2$ cu dreapta $y = 2x+3$:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(-1,1), B(3,9)$$

$I = \int_{-1}^3 \int_{x^2}^{2x+3} xy\, dxdy = \int_{-1}^3 dx \int_{x^2}^{2x+3} xy\, dy = \displaystyle\int_{-1}^3 [(x\frac{y^2}{2})|_{x^2}^{2x+3}]\, dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x}{2}[(2x+3)^2 - (x^2)^2]\, dx = \int_{-1}^3 \frac{x}{2}(4x^2+12x+9-x^4)\, dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^3 (-\frac{x^5}{2} + 2x^3 + 6x^2 + \frac{9x}{2})\, dx = (-\frac{x^6}{12} + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + \frac{9x^2}{4})|_{-1}^3 =$

$= \dfrac{301}{6}$

5. Folosind coordonatele polare să se calculeze

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy, \text{ unde } D : \begin{cases} 2 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x+y \ge 0 \end{cases}$$

Soluţie.

Facem schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \Rightarrow \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r.$$

Utilizând desenul deducem $r \in [\sqrt{2}, 2]$ şi $r \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Fie $D' = [\sqrt{2}, 2] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Astfel avem:

$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \iint_{D'} \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} | \frac{D(x,y)}{D(r,t)} |\, drdt = \iint_{D'} r^2\, drdt = \int_{\sqrt{2}}^2 dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r^2 dt = \int_{\sqrt{2}}^2 r^2 \pi\, dr = \frac{r^2\pi}{3}|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{2\pi}{3}(4-\sqrt{2})$

6. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu originea unei plăci plane omogene mărginită de curbele $y = 0, x+y-6 = 0, y^2 = 8x$.

Demonstraţie. Intersectând curbele obţinem punctele $O(0,0), A(6,0), B(0,6)$. Momentul de inerţie în raport cu originea este

$I_0 = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{y^2}{8}}^{6-y} (x^2+y^2)dx \right) dy =$

$= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) /_{\frac{y^2}{8}}^{6-y} dy = \int_0^4 \left[\frac{(6-y)^3}{3} + y^2(6-y) - \frac{y^6}{3 \cdot 8^3} - \frac{y^4}{8} \right] dy =$

$= 136 - \frac{128}{5} - \frac{32}{21}$ □

7. Să se afle coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene care formează domeniul $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, x \ge 0, y \ge 0 \right\}$.

Soluţie

Coordonatele centrului de greutate sunt date de formulele:

$$x_G = \frac{\iint\limits_{\Omega} xdxdy}{\iint\limits_{\Omega} dxdy}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_{\Omega} ydxdy}{\iint\limits_{\Omega} dxdy}$$

Observăm că domeniul plan Ω este porţiunea din primul cadran a elipsei $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$.

$$\iint\limits_{\Omega} dxdy = \text{aria}\,(\Omega) = \frac{1}{4}\pi ab.$$

Pentru calculul celorlalte două integrale considerăm schimbarea de variabile $\phi : W \to \Omega$, $\phi(t,r) = (ar\cos t, br\sin t)$, cu $(t,r)\in W = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$.

Cum $\det J_\phi(t,r) = abr$, rezultă:

$$\iint\limits_{\Omega} xdxdy = \iint\limits_{W} ar\cos t\cdot abrdrdt = a^2b\int_0^{\pi/2}\cos tdt\int_0^{a} r^2dr = \frac{a^2b}{3}$$

$$\iint\limits_{\Omega} ydxdy = \int_0^{\pi/2} dt\int_0^{a} br\sin t\cdot abrdr = \frac{ab^2}{3}$$

Aşadar, $G\left(\dfrac{4a}{3\pi},\dfrac{4b}{3\pi}\right)$.

8. Să se calculeze volumul tetraedrului $T\subset\mathbb{R}^3$ mărginit de planele

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+2y+z-6=0.$$

Soluţie

Vârfurile tetraedrului T sunt $O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$, iar proiecţia sa în planul xOy este triunghiul dreptunghic Ω de vârfuri $(0,0)$, $(6,0)$ şi $(0,3)$. Avem:

$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\ 0\leq x\leq 6;\ 0\leq y\leq 3-\frac{x}{2}\right\}$ şi

$T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|\ 0\leq z\leq 6-x-2y;\ (x,y)\in\Omega\right\}$

$$\text{Vol}\,(T) = \iiint\limits_{T} dxdydz = \iint\limits_{\Omega} dxdy\int_0^{6-x-2y} dz = \iint\limits_{\Omega}(6-x-2y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^6 dx\int_0^{3-\frac{x}{2}}(6-x-2y)\,dy = \int_0^6\left(9-3x+\frac{x^2}{4}\right)dx = 18.$$

9. Să se calculeze

$$\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$$

unde T este sfera (plină) $T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x^2+y^2+z^2 \le z \right\}$.

Soluţie

Fie $W = \left\{ (s,t,r) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 0 \le s \le 2\pi,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \cos t \right\}$
şi $\phi : W \to T$, schimbarea de variabile:

$$\phi(s,t,r) = (r\sin t\cos s, r\sin t\sin s, r\cos t)$$

Cum $\det J_\phi(s,t,r) = r^2 \sin t$, rezultă:

$$\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint\limits_W r \cdot r^2 \sin t ds dt dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} ds \int\limits_0^{\pi/2} dt \int\limits_0^{\cos t} r^3 \sin t dr = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 t \sin t}{4} dt = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos^5 t}{5}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}$$

10. Să se calculeze masa corpului V de densitate $\rho(x,y,z) = z$ mărginit de suprafeţele $x^2+y^2+z^2 = 24, x^2+y^2 = 2z$.

Demonstraţie. Intersecţia celor două suprafeţe este cercul $x^2+y^2 = 8$ situat în planul $z = 8$

$M = \int\int\int_V zdxdydz = \int\int_{x^2+y^2\le 8} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{24-x^2-y^2}} zdz \right) dxdy =$
$= \frac{1}{2} \int\int_{x^2+y^2\le 8} \left[24 - x^2 - y^2 - \left(\frac{x^2+y^2}{2} \right)^2 \right] dxdy =$
$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(24 - \rho^3 - \frac{\rho^4}{4} \right) d\rho = \frac{176\pi}{3}$ □

11. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unui corp omogen definit de $x^2+y^2 \le 2z, x+y-z \le 0$.

Soluţie

$M = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\le 0} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} dz \right) dxdy =$
$= \frac{1}{2} \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\le 0} (2x+2y-x^2-y^2)dxdy =$
$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3)d\rho = \pi$
(unde am folosit trecerea la coordonate polare $x = 1 + \rho\cos\theta$,
$y = 1 + \rho\sin\theta$)

$\int\int\int_V xdxdydz = \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} xdz\right)dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0} x(2x+2y-x^2-y^2)dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}}(2\rho^2-\rho^3)(1+\rho\cos\theta)d\rho = \pi$
Deci $x_G = 1$

$\int\int\int_V ydxdydz = \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} ydz\right)dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0} y(2x+2y-x^2-y^2)dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}}(2\rho^2-\rho^3)(1+\rho\sin\theta)d\rho = \pi$
Deci $y_G = 1$

$\int\int\int_V zdxdydz = \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} zdz\right)dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0}\left[(x+y)^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right]dxdy$
Trecem la coordonate polare $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$,
$0 \leq \rho \leq 2(\sin\theta + \cos\theta)$ şi obţinem
$\int\int\int_V zdxdydz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} \rho\left(\rho^2 + \rho^2\sin 2\theta - \frac{\rho^4}{4}\right)d\rho = \frac{5\pi}{3}$
Deci $z_G = \frac{5}{3}$

12. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz al corpului omogen de densitate $\rho(x,y,z) = \rho_0$ mărginit de suprafeţele sferice $(S_1): x^2+y^2+z^2 = 2z$ şi $(S_2): x^2+y^2+z^2 = 1$.

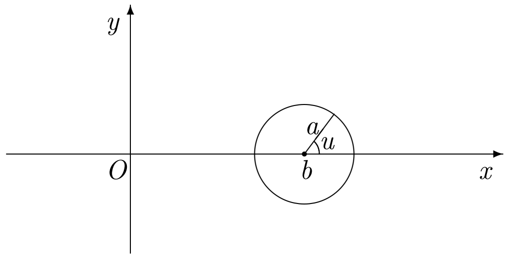
Demonstraţie. Corpul este mărginit inferior de S_1 şi superior de S_2.Suprafeţele S_1 şi S_2 se intersectează după cercul $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$ din planul $z = \frac{1}{2}$.
$I_{Oz} = \int\int\int_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \rho_0\int\int\int_V (x^2+y^2)dxdydz =$
$= \rho_0\int\int_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}}\left(\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2)dz\right)dxdy =$
$= \rho_0\int\int_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}}(x^2+y^2)z/_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy =$
$= \rho_0\int\int_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}}(x^2+y^2)(2\sqrt{1-x^2-y^2}-1)dxdy =$
$= \rho_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{4}}\rho^3(2\sqrt{1-\rho^2}-1)d\rho d\theta = \frac{53\rho_0\pi}{480}$ □

18.14 Integrala de suprafaţă

1. Să se calculeze aria torului.

Soluţie

Considerăm în planul xOy un cerc de rază a, cu centrul în punctul $(b,0)$ unde $0 < a < b$.



Torul este suprafaţa care se obţine când rotim acest cerc, ca un corp rigid, în spaţiu, în jurul axei Oy. Dacă notăm cu v unghiul de rotaţie al cercului în jurul axei Oy atunci ecuaţiile parametrice ale torului T sunt:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & (b+a\cos u)\cos v \\ y & = & a\sin u \\ z & = & (b+a\cos u)\sin v \end{array}\right. ,0\le u\le 2\pi, 0\le v\le 2\pi.$$

Avem:

$$A=\left|\begin{array}{cc} a\cos u & -a\sin u\sin v \\ 0 & (b+a\cos u)\cos v \end{array}\right| = a\,(b+a\cos u)\cos u\cos v;$$

$$B=-\left|\begin{array}{cc} -a\sin u\cos v & -a\sin u\sin v \\ -\,(b+a\cos u)\sin v & (b+a\cos u)\cos v \end{array}\right| = a\,(b+a\cos u)\sin u;$$

$$C=\left|\begin{array}{cc} -a\sin u\cos v & a\cos u \\ -\,(b+a\cos u)\sin v & 0 \end{array}\right| = a\,(b+\cos u)\cos u\sin v$$

şi $A^2+B^2+C^2=a^2\,(b+a\cos u)^2$.

Dacă notăm cu $\Omega=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ atunci:

$$\text{Aria}\,(T)=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv=\int\limits_0^{2\pi}dv\int\limits_0^{2\pi}a\,(b+a\cos u)\,du=4\pi^2ab.$$

2. Să se calculeze aria porţiunii din emisfera superioară

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\ge 0,$$

decupată de cilindrul $x^2+y^2-Rx=0$.

Soluţie

Dacă notăm cu S suprafaţa menţionată în enunţ atunci S este graficul funcţiei:

$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, (x,y) \in D$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \left| x^2 + y^2 - Rx \leq 0 \right.\right\}$.

$A = \text{Aria}(S) = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$, unde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Avem:

$$p = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ q = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ 1+p^2+q^2 = \frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

şi mai departe

$$A = R\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Fie $W = \left\{(t,r) \in \mathbb{R}^2 \left| -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq r \leq R\cos t \right.\right\}$ şi $\phi : W \to D$ schimbarea de variabile $\phi(t,r) = (r\cos t, r\sin t)$.

Deoarece $\det J_\phi(t,r) = r$, avem:

$$A = R\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \int\limits_0^{R\cos t} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}dr = -R\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left.\sqrt{R^2-r^2}\right|_0^{R\cos t} dt =$$

$$= -R\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (R|\sin t| - R)\,dt = -2R^2\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t - 1)\,dt = (\pi - 2)R^2.$$

3. Să se calculeze $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,d\sigma$, unde S este porţiunea din conul $x^2+y^2 = z^2, z \geq 0$, decupată de cilindrul $x^2+y^2 = 2y$.

Soluţie

Observăm că suprafaţa S este graficul funcţiei $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \left| x^2+y^2-2y \leq 0 \right.\right\}$.

În continuare avem:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1+p^2+q^2 = 2.$$

$$\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,d\sigma = \iint\limits_D \left[xy + (y+x)\sqrt{x^2+y^2}\right]\sqrt{2}dxdy.$$

Fie $W = \left\{(t,r) \in \mathbb{R}^2 \left| 0 \leq t \leq \pi; 0 \leq r \leq 2\sin t \right.\right\}$ şi $\phi : W \to D$ schimbarea de variabile

$$\phi(t,r) = (r\cos t, r\sin t).$$

În urma acestei schimbări de variabile obţinem:

$$\iint_S (xy + yz + zx)\, d\sigma =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} dt \int_0^{2\sin t} (r^2 \sin t \cos t + r^2 \sin t + r^2 \cos t) r dr =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} (\sin t \cos t + \sin t + \cos t)\, dt \int_0^{2\sin t} r^3 dr =$$

$$4\sqrt{2}\int_0^{\pi} \left(\sin^5 t \cos t + \sin^5 t + \sin^4 t \cos t\right) dt =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin^5 t dt = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 t\right)^2 \sin t dt = \frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

18.15 Formule integrale

1. Să se calculeze:

$$\oint_{\partial K} y^2 dx + x^2 dy$$

unde cu ∂K am notat frontiera domeniului compact

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}.$$

Soluţie

Dacă notăm cu $P(x, y) = y^2$ şi $Q(x, y) = x^2$ atunci din formula Riemann-Green rezultă:

$$\oint_{\partial K} y^2 dx + x^2 dy = \iint_K 2(x - y)\, dx dy.$$

Dacă facem schimbarea de variabile $(t, r) \to (r \cos t, r \sin t) : W \to K$, unde $W = [0, \pi] \times [0, 1]$ obţinem:

$$\iint_K 2(x - y)\, dx dy = 2\int_0^{\pi} dt \int_0^1 r^2 (\cos t - \sin t)\, dr =$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{\pi} (\cos t - \sin t)\, dt = -\frac{4}{3}.$$

2. Să se calculeze direct şi apoi să se verifice rezultatul cu formula Riemann-Green:

$$\oint_{\partial K} (xy - y)\, dx + (xy + x)\, dy$$

unde ∂K este frontiera domeniului compact

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Soluţie

Pentru calculul direct folosim reprezentarea parametrică a elipsei:

$$\partial K : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Obţinem:

$$\oint_{\partial K} (xy - y)\, dx + (xy + x)\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} (ab\sin t\cos t - b\sin t)\cdot(-a\sin t) + (ab\sin t\cos t + a\cos t)\cdot(b\cos t)\, dt =$$

$$= -a^2 b \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t dt + ab^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin t dt + ab\int_0^{2\pi} dt = 2\pi ab.$$

Dacă notăm cu $P(x, y) = xy - y$ şi $Q(x, y) = xy + x$ atunci $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + y + 2$ şi din formula Riemann-Green deducem:

$$\oint_{\partial K} (xy - y)\, dx + (xy + x)\, dy = \iint_K (x + y + 2)\, dxdy.$$

Fie $W = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ şi schimbarea de variabile $\phi(t, r) = (ar\cos t, br\sin t)$. Deoarece $\det J_\phi(t, r) = abr$ avem:

$$\iint_K (x + y + 2)\, dxdy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (ar\cos t + br\sin t + 2)\, abrdt =$$

$$= a^2 b \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos t dt + ab^2 \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin t dt + 2ab\int_0^1 rdr \cdot \int_0^{2\pi} dt =$$

$$= 2ab \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 2\pi ab.$$

3. Să se calculeze următoarea integrală curbilinie aplicând formula Green-Riemann: $\int_\Gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy$, unde $\Gamma = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x,y) \mid x + y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.
Soluţie
Curba Γ nu este închisă, deci nu putem aplica direct formula Green-Riemann. Fie $A(0,-1)$ şi $B(0,1)$ şi fie $[AB]$ segmentul orientat (de la A c'atre B) determinat de aceste puncte. Fie $\Lambda = \Gamma \cup [AB]$; atunci Λ este o curbă închisă şi deci, aplicând formula Green-Riemann, obţinem (notăm cu K compactul mărginit de Λ):
$$\int_\Lambda xydx + \frac{x^2}{2}dy = \int\int_K 0dxdy = 0.$$
Rezultă deci:
$$\int_\Gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy = -\int_{[AB]} xydx + \frac{x^2}{2}dy = 0,$$
ultima integrală curbilinie calculându-se imediat cu definiţia.

4. Să se calculeze aria mulţimii mărginite de curba Γ: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.
Soluţie
Aria mulţimii mărginite de curba Γ este $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx$. Cu parametrizarea $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi)$, obţinem:
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{3}{8}\pi.$$

5. Fie $\alpha = \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$.
a. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha$, unde, am notat cu $\mathcal{C}(O,R)$ cercul de centru O şi rază $R > 0$.
b. Să se calculeze $\int_\Gamma \alpha$, unde, Γ este o curbă arbitrară închisă astfel încât $O \notin \Gamma$.
Soluţie
a. Să observăm, mai întâi că $\alpha \in \mathcal{C}^1(R^2 \setminus \{O\})$, deci pentru calculul integralei de la punctul a nu se poate aplica formula Green-Riemann. Folosim definiţia integralei curbilinii; parametrizăm cercul:
$$x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi)$$
şi obţinem:
$$\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b. Notăm cu K compactul mărginit de curba Γ. Distingem două cazuri: dacă $O \notin K$ (se poate aplica formula Green-Riemann) sau dacă $O \in K$ (nu se poate aplica formula Green-Riemann).
Presupunem mai întâi că $O \notin K$; atunci:

$$\int_\Gamma \alpha = \int\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-y}{x^2+y^2} \right) \right) dxdy = 0.$$

Presupunem acum că $O \in K$; fie $R > 0$ astfel încât $\mathcal{C}(O,R)$ este inclus în interiorul lui K. Notăm cu $D(O,R)$ discul deschis de centru O şi rază R. Fie A compactul $A = K \setminus D(O,R)$. Bordul orientat al lui A este reuniunea $\partial A = \Gamma \cup \mathcal{C}(O,R)$, sensul pe cerc fiind sensul trigonometric negativ. Deoarece $O \notin A$, avem:

$$\int_{\partial A} \alpha = \int\int_A 0 dxdy = 0.$$

Rezultă :

$$\int_\Gamma \alpha = \int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = 2\pi.$$

6. Fie $a < b$, fie $\gamma : [a,b] \mapsto R^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, un drum parametrizat închis $(\gamma(a) = \gamma(b))$, orientat în sens trigonometric pozitiv şi fie K compactul mărginit de imaginea lui γ. Intr-un punct arbitrar $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, considerăm vectorul normal la γ, $\overline{n}(t) = (y'(t), -x'(t))$. Să se demonstreze că pentru orice câmp de vectori $\overline{V}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K, avem:

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int\int_K \operatorname{div}(\overline{V})dxdy.$$

Soluţie
Din definiţia integralei curbilinii, rezultă :

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int_\gamma Pdy - Qdx.$$

Aplicând ultimei integrale curbilinii formula Green-Riemann, obţinem:

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int_\gamma Pdy - Qdx =$$

$$= \int\int_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \int\int_K \operatorname{div}(\overline{V})dxdy.$$

7. **Formula de medie pentru funcţii armonice**
O funcţie $f : U \subseteq R^2 \mapsto R$ se numeşte armonică pe U dacă

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \,\mathrm{pe}\, U.$$

Fie f o funcţie armonică pe discul unitate. Atunci:

$$f((0,0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t, \rho\sin t)dt, \; \forall \rho \in (0,1),$$

egalitate numită formula de medie pentru funcţii armonice.
Soluţie
Fie $\rho \in (0,1)$ şi fie

$$g(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t, \rho\sin t)dt.$$

Vom demonstra că funcţia g este constantă.
Pentru aceasta, calculăm derivata sa:

$g'(\rho) =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos t, \rho\sin t)\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos t, \rho\sin t)\sin t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos t, \rho\sin t), \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos t, \rho\sin t)\right)\cdot(\rho\cos t, \rho\sin t)\, dt.$$

Vom aplica acum rezultatul exerciţiului de mai sus.
Vectorul $\overline{n} = (\rho\cos t, \rho\sin t)$ este vectorul normal (exterior) la cercul de centru O şi rază ρ, iar câmpul vectorial $\overline{V} = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}$. Obţinem (notăm cu K discul de centru O şi rază ρ):

$$g'(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\int\int_K \Delta f dxdy = 0.$$

Rezultă deci că funcţia g este constantă pe intervalul $(0,1)$; în consecinţă avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t, \rho\sin t)dt = g(\rho) = \lim_{\rho\to 0} g(\rho) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f((0,0)) = f((0,0)).$$

8. Să se calculeze, folosind formula Gauss-Ostrogradski, următoarea integrală de suprafaţa:

$$\iint_{\partial K} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$$

unde ∂K este bordul domeniului compact

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \; 0 \leq x, y, z \leq a \right\},$$

orientat după normala exterioară.

Soluţie

Fie câmpul $V = (P, Q, R)$ unde $P(x, y, z) = x^2, Q(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = z^2$.

Atunci $\mathrm{div} V = 2\,(x + y + z)$ şi din formula Gauss deducem:

$$\iint_{\partial K} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy = \iiint_K 2\,(x + y + z)\, dx dy dz =$$

$$= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z)\, dz = 2 \int_0^a dx \int_0^a \left((x + y)\, z + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^a dy =$$

$$= 2 \int_0^a dx \int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) dy = 2 \int_0^a \left(axy + a \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot y \right) \Bigg|_0^a dx =$$

$$= 2 \int_0^a (a^2 x + a^3) dx = 3a^4.$$

9. **Legea lui Arhimede**. Considerăm un recipient (conţinut în semispaţiul $z < 0$) în care s-a turnat un lichid având densitatea constantă c.

Scufundăm în lichid un corp pe care îl asimilăm cu un compact cu bord orientat $(K, \partial K)$. Presupunând că presiunea exercitată de lichid asupra corpului scufundat creşte proporţional cu adâncimea, obţinem pentru câmpul presiunilor formula $\overline{V} = cz\overline{k}$. Forţa ascensională pe care lichidul o exercită asupra corpului scufundat este, prin definiţie, egală cu fluxul câmpului presiunilor prin suprafaţa (bordul) ∂K, în raport cu normala exterioară, $\overline{n}$. Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\mathcal{F}_{\partial K}(\overline{V}) = \int_{\partial K} \overline{V}\, \overline{n} d\sigma =$$

$$= \int\int\int_K \mathrm{div} \overline{V}\, dx dy dz = \int\int\int_K c dx dy dz = c \,\mathrm{vol}(K),$$

adică forţa ascensională este egală cu masa lichidului dezlocuit de corpul scufundat.

10. **Legea lui Gauss**. Pentru orice $q > 0$, considerăm câmpul scalar

$$f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi r}$$

şi fie câmpul de gradienţi:

$$\overline{E} = -\text{grad} f.$$

Câmpul scalar f reprezintă potenţialul electric (sau potenţial Newtonian) asociat sarcinei electrice q plasate în O, iar $\overline{E}$ este câmpul electric generat (sau câmp Newtonian).
a. Să se expliciteze $\overline{E}$ şi să se demonstreze că este câmp solenoidal, adică : $\text{div}\overline{E} = 0$.
b. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior este nul.
c. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce conţine originea în interior este q, (legea lui Gauss).
Soluţie
a. Putem calcula $\overline{E}$ direct cu definiţia, sau aplicând proprietăţile gradientului; obţinem:

$$\overline{E} = -\text{grad} f = \frac{q}{4\pi} \frac{\overline{r}}{r^3}.$$

Arătăm acum că $\overline{E}$ este solenoidal:

$$\text{div}\overline{E} = -\text{grad}(\text{div} f) = -\Delta f = \frac{q}{4\pi r^6} \left(3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)\right) = 0.$$

b. Fie Σ o suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior. Deoarece câmpul electric $\overline{E}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $R^3 \setminus \{O\}$, sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski şi deci, (notăm cu K compactul mărginit de Σ şi cu $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la Σ), obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_\Sigma \overline{E}\,\overline{n} d\sigma = \int\int\int_K \text{div}\overline{E} dxdydz = 0.$$

c. Fie acum Σ o suprafaţă închisă ce conţine originea în interior. Deoarece $\overline{E}$ nu este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe compactul K mărginit de Σ, ($\overline{E}$ nefiind de clasă $\mathcal{C}^1$ în origine), nu putem aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru a calcula fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ. Fie $R > 0$ astfel încât sfera de centru O şi rază R (notată în continuare cu S), să fie inclusă în interiorul lui Σ. Fie suprafaţa (închisă) $\Sigma_1 = \Sigma \cup S$, orientată după normala exterioară (deci pe S este normala interioară la sferă). Fie K_1 mulţimea compactă mărginită de Σ_1. Deoarece $O \notin K_1$, fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ_1 este nul (conform (b)). Rezultă că fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ este egal cu fluxul lui $\overline{E}$ prin S (orientată după normala exterioară $\overline{n} = \dfrac{\overline{r}}{R}$

la sferă):

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_S \overline{E}\,\overline{n} d\sigma = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = q.$$

11. Fie $n \in N$ şi fie $q_\imath > 0$, $\forall \imath \in \{1, 2, .., n\}$. Fie $A_\imath$, $\imath \in \{1, 2, .., n\}$, n puncte în R^3 de coordonate $(x_\imath, y_\imath, z_\imath)$. Notăm cu $\overline{r_\imath}$ vectorul de poziţie al punctului $A_\imath$. Potenţialul electric generat de sarcinile electrice $q_\imath$ plasate în punctele $A_\imath$ este

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\imath=1}^{n} \frac{q_\imath}{\|\, \overline{r} - \overline{r_\imath} \,\|},$$

unde, $\|\cdot\|$ este norma euclidiană în R^3. Fie $\overline{E} = -\text{grad} f$ câmpul electric asociat potenţialului f. Să se demonstreze că fluxul câmpului electric $\overline{E}$ printr-o suprafaţă arbitrară închisă ce conţine toate punctele $A_\imath$ în interiorul ei este egal cu $\displaystyle\sum_{\imath=1}^{n} q_\imath$.

Soluţie

Se aplică raţionamentul din exerciţiul anterior.

12. Fie Σ o suprafaţă închisă şi fie K compactul mărginit de Σ. Să se demonstreze că :

$$\frac{1}{3}\int_\Sigma \overline{r}\,\overline{n} d\sigma = \text{vol}\,(K)\,,$$

unde, $\overline{n}$ este normala exterioară la Σ.

Soluţie

Se aplică formula Gauss-Ostrogradski:

$$\frac{1}{3}\int_\Sigma \overline{r}\,\overline{n} d\sigma = \frac{1}{3}\int\int\int_K \text{div}(\overline{r})\, dxdydz = \int\int\int_K dxdydz = \text{vol}(K).$$

13. Fie câmpul vectorial $\overline{V} = \overline{r} + \dfrac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\,\overline{r}$ şi fie suprafaţa

$$\Sigma = \{(x, y, z); z = 3 - x^2 - y^2, 1 \le z\} \cup \{(x, y, z); x^2 + y^2 \le 2, z = 1\}.$$

Să se calculeze fluxul lui $\overline{V}$ prin Σ, orientată după normala exterioară.

Soluţie

Se aplică formula Gauss-Ostrogradski; pentru aceasta, calculăm

$$\text{div}\overline{V} = \text{div}\left(\overline{r} + \frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\overline{r}\right) = 3 + \left(\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\right)\text{div}\overline{r} + \overline{r}\text{grad}\left(\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\right) =$$

$$= 3 + 3\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4} + \overline{r}\left(\frac{1}{r^4}\mathrm{grad}(\overline{k}\,\overline{r}) + (\overline{k}\,\overline{r})\mathrm{grad}r^{-4}\right) =$$

$$= 3 + 3\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4} + \overline{r}\left(\frac{\overline{k}}{r^4} - 4\frac{(\overline{k}\,\overline{r})}{r^6}\overline{r}\right) = 3.$$

Notând cu K compactul mărginit de suprafaţa Σ, rezultă :

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int_\Sigma \overline{V}\,\overline{n}d\sigma = \int\int\int_K 3dxdydz = 3\mathrm{vol}(K).$$

14. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\overline{V} = \frac{1}{r}(\overline{r} \times \overline{k})$ prin:
a. O suprafaţă închisă arbitrară ce nu conţine originea în interior.
b. Sfera de centru O şi rază R.
Soluţie
a. In primul caz se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski; fluxul este nul deoarece div$\overline{V} = 0$.
b. In cazul al doilea, fluxul se calculează cu definiţia integralei de suprafaţă (nu sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski); şi în acest caz fluxul este tot 0 deoarece vectorii $\overline{V}$ şi normala exterioară la sferă sunt ortogonali.

15. **Formulele lui Green**
Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat din R^3. Fie $\overline{n}$ normala exterioară la ∂K şi fie f, g două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe o vecinătate a lui K. Să se demonstreze formulele lui Green:
a. $\displaystyle\int_{\partial K} f\,(\mathrm{grad}g)\,\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K \left(f\,\Delta g + (\mathrm{grad}f)(\mathrm{grad}g)\right)dxdydz.$
b. $\displaystyle\int_{\partial K}\left(f\,(\mathrm{grad}g) - g\,(\mathrm{grad}f)\right)\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K\left(f\,\Delta g - g\,\Delta f\right)dxdydz.$
Soluţie
a. Pentru prima formulă se aplică formula Gauss-Ostrogradski câmpului de vectori $\overline{V} = f\,\mathrm{grad}g$:

$$\int_{\partial K} f\,(\mathrm{grad}g)\,\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K \mathrm{div}(f\,\mathrm{grad}g)\,dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K\left(f\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}g) + (\mathrm{grad}g)\,(\mathrm{grad}f)\right)dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K\left(f\Delta g + (\mathrm{grad}g)\,(\mathrm{grad}f)\right)dxdydz.$$

b. A doua formulă rezultă direct din prima.

16. Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat din R^3 şi fie $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la suprafaţa ∂K. Fie h o funcţie armonică pe o vecinătate a lui K şi fie $\dfrac{dh}{d\overline{n}}$ derivata după direcţia $\overline{n}$ a lui h. Să se demonstreze egalităţile:
a. $\displaystyle\int_{\partial K} \frac{dh}{d\overline{n}}\, d\sigma = 0.$
b. $\displaystyle\int_{\partial K} h\, \frac{dh}{d\overline{n}}\, d\sigma = \int\int\int_K \parallel \mathrm{grad} h \parallel^2 dxdydz.$
Soluţie
a. Se aplică prima formulă a lui Green pentru: $f = 1$ şi $g = h$; o altă metodă este de a aplica formula Gauss-Ostrogradski câmpului $\overline{V} = \mathrm{grad} h$:

$$\int_{\partial K} \frac{dh}{d\overline{n}}\, d\sigma = \int_{\partial K} (\mathrm{grad} h)\, \overline{n}\, d\sigma =$$
$$= \int\int\int_K \mathrm{div}(\mathrm{grad} h)\; dxdydz = \int\int\int_K \Delta h = 0.$$

b. Se aplică a doua formulă a lui Green pentru $f = g = h$; o altă metodă constă în a aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru $\overline{V} = h\, \mathrm{grad} h$:

$$\int_{\partial K} h\, \frac{dh}{d\overline{n}}\, d\sigma = \int\int\int_K h\, \mathrm{grad} h\; \overline{n}\; d\sigma =$$
$$= \int\int\int_K \mathrm{div}(h\, \mathrm{grad} h)\; dxdydz =$$
$$= \int\int\int_K \Big(h\, \mathrm{div}(\mathrm{grad} h) + (\mathrm{grad} h)\, (\mathrm{grad} h) \Big)\; dxdydz =$$
$$= \int\int\int_K \Big(h\, \Delta g + \parallel \mathrm{grad} h \parallel^2 \Big)\; dxdydz =$$
$$= \int\int\int_K \parallel \mathrm{grad} h \parallel^2\; dxdydz.$$

17. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\displaystyle\int_\Gamma \alpha$ în următorul caz :
$\alpha = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz.$
$\Gamma : z = x^2 + y^2,\ z = 1.$
Soluţie
Fie suprafaţa $\Sigma = \{(x, y, z); z = x^2 + y^2 + z^2, z \leq 1\}$; atunci Γ este bordul lui Σ şi aplicând formula lui Stokes obţinem (lăsăm ca exerciţiu verificarea compatibilităţii orientărilor):

$$\int_\Gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz = \int_\Sigma -2(dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy) =$$

$$= -2 \int \int_D (-2x - 2y + 1) dxdy,$$

unde D este discul unitate.

18. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala:
$\int_\Gamma y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz$, $\Gamma:\ z^2 = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 2x.$
Soluţie
Integrala este 0.

19. Să se calculeze circulaţia câmpului vectorial

$$\overline{V} = (y^2 + z^2)\overline{i} + (x^2 + z^2)\overline{j} + (x^2 + y^2)\overline{k}$$

pe curba $\Gamma:\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ ax + by + cz = 0.$
Soluţie
Curba Γ este un cerc mare al sferei (intersecţia sferei cu un plan ce trece prin centrul sferei); considerăm drept suprafaţă Σ oricare din cele două semisfere determinate de plan pe sferă. Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma \overline{V}\, d\overline{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\overline{V})\, \overline{n}\, d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma (2(y-z)\overline{i} + 2(z-x)\overline{j} + 2(x-y)\overline{k}) \cdot \frac{1}{R}(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k})\, d\sigma = 0,$$

deoarece versorul normalei (exterioare) la sferă, $\overline{n} = \frac{1}{R}\overline{r}$ şi rot$\overline{V}$ sunt perpendiculari.

20. Să se calculeze direct şi cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

unde Γ este poligonul de intersecţie dintre cubul $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ şi planul $x + y + z = \dfrac{3}{2}$.
Soluţie
Γ este un hexagon regulat. Pentru a calcula integrala cu definiţia trebuie parametrizate laturile hexagonului; de exemplu, latura din planul xOy are parametrizarea:

$$x(t) = t, y(t) = \frac{3}{2} - t,\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Calculăm acum integrala aplicând formula lui Stokes. Fie Σ porţiunea din planul $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ situată în interiorul cubului (interiorul hexagonului). Proiecţia lui Σ pe planul xOy este mulţimea

$$D=\{(x,y);\frac{1}{2}\leq x+y\leq\frac{3}{2},\,0\leq x\leq 1,\,0\leq y\leq 1\},$$

a cărei arie este $\dfrac{3}{4}$. O parametrizare (carteziană) a suprafeţei Σ este

$$z=\frac{3}{2}-x-y,\ (x,y)\in D.$$

Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=$$

$$=-2\int_{\Sigma}(x+y)dx\wedge dy+(y+z)dy\wedge dz+(z+x)dz\wedge dx=$$

$$=-2\int\int_{D}3dxdy=-6\,\mathrm{aria}(D)=-\frac{9}{2}.$$

21. Fie $a>0,\ \ b>0,\ \ c>0$, şi fie punctele $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ şi $C(0,0,c)$. Fie Γ reuniunea segmentelor $[AB]\cup[BC]\cup[CA]$ (cu acest sens). Să se calculeze $\displaystyle\int_{\Gamma}(z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$.

Soluţie

Vom calcula integrala aplicând formula lui Stokes (lăsăm ca exerciţiu calculul direct). Fie Σ interiorul triunghiului ABC; obţinem:

$$\int_{\Gamma}(z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz=\int_{\Sigma}2dx\wedge dy+2dy\wedge dz+2dz\wedge dx.$$

Proiecţia lui Σ pe planul xOy este interiorul triunghiului OAB, iar parametrizarea carteziană este

$$z=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right).$$

Rezultă :

$$\int_{\Gamma}(z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz=2\int\int_{OAB}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\right)dxdy=$$

$$=ab+bc+ca.$$

22. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V} = \dfrac{1}{r}(\overline{k} \times \overline{r})$ pe curba $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, unde:
$\Gamma_1 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z = 0, x > 0, y > 0\}$
$\Gamma_2 = \{(x, y, z); y^2 + z^2 = 1, x = 0, y > 0, z > 0\}$
$\Gamma_3 = \{(x, y, z); z^2 + x^2 = 1, y = 0, z > 0, x > 0\}$.
Soluţie
Vom aplica formula lui Stokes; pentru aceasta, calculăm mai întâi rotorul câmpului $\overline{V}$:

$$\mathrm{rot}\overline{V} = \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}(\overline{k} \times \overline{r}) - (\overline{k} \times \overline{r})\mathrm{grad}\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\overline{k}\,\mathrm{div}\overline{r} - \overline{r}\,\mathrm{div}\overline{k} + \frac{d\overline{k}}{d\overline{r}} - \frac{d\overline{r}}{d\overline{k}}\right) + (\overline{k} \times \overline{r})\,\frac{\overline{r}}{r^3} = \frac{2\overline{k}}{r}.$$

Fie suprafaţa $\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$; evident, bordul lui Σ este Γ. Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma \overline{V}\,d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}\overline{V}\overline{n}d\sigma,$$

unde, $\overline{n} = \overline{r}$ este versorul normalei exterioare la Σ. Pentru a calcula integrala de suprafaţă, putem folosi atât parametrizarea carteziană cât şi coordonatele sferice; se obţine $\displaystyle\int_\Gamma \overline{V}d\overline{r} = \frac{\pi}{2}$.

23. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $\overline{n}$ versorul normalei la Σ şi fie $\overline{c}$ un vector constant. Să se demonstreze că circulaţia câmpului vectorial $\overline{V} = (\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}$ pe curba $\partial\Sigma$ este egală cu $\displaystyle\int_\Sigma \overline{c}\,(\overline{r} \times \overline{n})\,d\sigma$.
Soluţie
Aplicăm formula lui Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} (\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}\,d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}\Big((\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}\Big)\,\overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma \Big((\overline{c}\,\overline{r})\,\mathrm{rot}\overline{r} - \overline{r} \times \mathrm{grad}(\overline{c}\,\overline{r})\Big)\,\overline{n}\,d\sigma = \int_\Sigma (\overline{c} \times \overline{r})\,\overline{n}\,d\sigma = \int_\Sigma \overline{c}(\overline{r} \times \overline{n})d\sigma.$$

24. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $\overline{n}$ versorul normalei la Σ şi fie f şi g două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe o vecinătate a lui Σ. Să se demonstreze relaţiile:

$$\int_{\partial\Sigma} f\,\mathrm{grad}g\,d\overline{r} = \int_\Sigma \Big((\mathrm{grad}f) \times (\mathrm{grad}g)\Big)\,\overline{n}d\sigma.$$

$$\int_{\partial\Sigma} \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz = 0.$$

Soluţie
Se aplică formula lui Stokes. Pentru prima egalitate:

$$\int_{\partial\Sigma} f\,\text{grad}\,g\,d\overline{r} = \int_{\Sigma} \text{rot}(f \cdot (\text{grad}\,g)) \cdot \overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int_{\Sigma} \Big(f \cdot \text{rot}(\text{grad}\,g) - \text{grad}\,g \times \text{ grad}\,f\Big) \cdot \overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int_{\Sigma} \Big((\text{grad} f) \times (\text{grad} g)\Big)\,\overline{n} d\sigma.$$

Pentru a doua egalitate, calculăm rotorul:

$$\text{rot}\left(\left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\overline{i} + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{j} + \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z}\right)\overline{k}\right) = 0,$$

deci circulaţia este nulă (s-a folosit teorema de simetrie a lui Schwartz).

25. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat şi fie $\overline{n}$ versorul normalei la suprafaţa Σ.
a. Dacă f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $(0, \infty)$, să se calculeze circulaţia câmpului vectorial $\overline{V} = f(r)\overline{r}$ pe curba $\partial\Sigma$.
b. Dacă g este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui Σ şi $\overline{c}$ este un vector constant, să se demonstreze că circulaţia câmpului de vectori $\overline{W}(x, y, z) = g(x, y, z)\,\overline{c}$ pe curba $\partial\Sigma$ este

$$\int_{\Sigma} \overline{c}\,(\overline{n} \times \text{grad} g) d\sigma.$$

Soluţie
a. Aplicăm formula lui Stokes; pentru aceasta, calculăm

$$\text{rot}\overline{V} = f(r)\,\text{rot}\overline{r} - \overline{r} \times \text{grad} f(r) = -\overline{r} \times \frac{f'(r)}{r}\overline{r} = \overline{0},$$

deci circulaţia este nulă.
b. Aplicăm formula lui Stokes; calculând rotorul câmpului $\overline{W}$, obţinem

$$\text{rot}\overline{W} = -\overline{c} \times \text{grad} g,$$

ceea ce conduce la rezultatul cerut.

26. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $f \in \mathcal{C}^1(R)$, $a \in R^3$ şi fie $\overline{V} = (\overline{a}\,\text{grad}f(r))\,\overline{r}$, unde, $\overline{r}$ este vectorul de poziţie. Să se demonstreze:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V}\, d\overline{r} = \int_{\Sigma} \frac{\overline{a}\times\overline{r}}{r}\, f'(r)\, \overline{n}\, d\sigma,$$

unde, $\overline{n}$ este versorul normalei la Σ.
Soluţie
Se aplică formula lui Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V}\, d\overline{r} = \int_{\Sigma} \frac{\overline{a}\times\overline{r}}{r}\, f'(r)\overline{n}\, d\sigma = \int_{\Sigma} \text{rot}\,((\overline{a}\ \text{grad}f(r))\,\overline{r})\,\overline{n}\, d\sigma.$$

Calculăm acum rotorul lui $\overline{V}$; pentru aceasta, calculăm mai întâi:

$$\text{grad}f(r) = f'(r)\,\text{grad}r = f'(r)\,\frac{\overline{r}}{r}.$$

Obţinem:

$$\text{rot}\,((\,\overline{a}\,\text{grad}f(r)\,)\,\overline{r}) = \text{rot}\left(\frac{(\,\overline{a}\ \overline{r}\,)}{r}\, f'(r)\ \cdot\ \overline{r}\right) =$$

$$= \frac{(\overline{a}\ \overline{r})}{r} f'(r)\ \text{rot}\overline{r} - \overline{r}\times\ \text{grad}\left(\frac{(\,\overline{a}\ \overline{r}\,)}{r} f'(r)\right)$$

$$= -\overline{r}\times\ \left(f'(r)\,\text{grad}\left(\frac{(\,\overline{a}\ \overline{r}\,)}{r}\right) + \frac{(\,\overline{a}\,\overline{r}\,)}{r}\,\text{grad}f'(r)\right) =$$

$$= -\overline{r}\times\ \left(f'(r)\,\frac{r\,\overline{a} - (\,\overline{a}\,\overline{r}\,)\ \frac{\overline{r}}{r}}{r^2} + \frac{(\overline{a}\ \overline{r})}{r} f''(r)\,\frac{\overline{r}}{r}\right) =$$

$$= \frac{f'(r)}{r}\,(\overline{a}\times\overline{r}),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

18.16 Funcţii olomorfe şi teorema reziduurilor

1. Să se determine punctele în care funcţia $f(z) = z^2 + z\overline{z} - \overline{z}^2 + 2z - \overline{z}$ este olomorfă şi să se calculeze derivata funcţiei în acele puncte.

   Soluţie. Dacă $z = x + \text{i}y$, atunci $f(z) = x^2 + y^2 + x + \text{i}y(4x+3)$, deci $P(x,y) = x^2 + y^2 + x$ şi $Q(x,y) = y(4x+3)$.

   Condiţiile Cauchy-Riemann ne dau $2x + 1 = 4x + 3$ şi $2y = -4y$, deci $x = -1, y = 0$. Aşadar, funcţia f este olomorfă în $z = -1$.

Derivata în $z=-1$ este $f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-h+h\overline{h}-\overline{h}^2}{h}=-1+\lim\limits_{h\to 0}(h+\overline{h}-\dfrac{\overline{h}^2}{h})=-1+\lim\limits_{h\to 0}\left(-\dfrac{\overline{h}^2}{h}\right)=$
$=-1$, deoarece $\left|\frac{\overline{h}^2}{h}\right|=\frac{|\overline{h}|^2}{|h|}=\frac{|h|^2}{|h|}=|h|\longrightarrow 0$, când $h\longrightarrow 0$

2. Fie $P(x,y)=\mathrm{e}^{2x}\cos 2y+y^2-x^2$. Să se determine funcţia olomorfă $f=P+\mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$ astfel încât $f(0)=1$.

   Soluţie. Verificăm că funcţia P este armonică.

   Aplicăm condiţiile Cauchy-Riemann şi obţinem

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=2\mathrm{e}^{2x}\cos 2y-2x$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2\mathrm{e}^{2x}\sin 2y-2y$$

   Integrăm a doua ecuaţie în raport cu x şi obţinem $Q(x,y)=\mathrm{e}^{2x}\sin 2y-$ $-2xy+c(y)$. Inlocuind apoi în a prima ecuaţie avem $c'(y)=0$, deci $c(y)=k$. Atunci $f(z)=\mathrm{e}^{2x}\cos 2y+y^2-x^2+\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2x}\sin 2y-2xy+k)=$ $=\mathrm{e}^{2x}(\cos 2y+\mathrm{i}\sin 2y)-(x+\mathrm{i}y)^2+k\mathrm{i}\Longrightarrow f(z)=\mathrm{e}^{2z}-z^2+k\mathrm{i}$. Din condiţia din enunţ obţinem constanta $k:\ f(0)=1\Longrightarrow k=0$. Aşadar, $f(z)=\mathrm{e}^{2z}-z^2$.

3. Să se determine funcţia olomorfă $f=P+\mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$, unde $Q(x,y)=$ $=\varphi(x^2-y^2),\varphi\in\mathcal{C}^2$.

   Soluţie. Notăm $\alpha=x^2-y^2$.

   Avem $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x\varphi'(\alpha)$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=-2y\varphi'(\alpha)$, deci $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=2\varphi'(\alpha)+4x^2\varphi''(\alpha)$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=-2\varphi'(\alpha)+4y^2\varphi''(\alpha)$

   Cum Q este armonică rezultă că $\triangle Q=0\Longrightarrow\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=$ $=4(x^2+y^2)\varphi''(\alpha)=0\Longrightarrow\varphi''(\alpha)=0\Longrightarrow\varphi'(\alpha)=c\Longrightarrow\varphi(\alpha)=$ $=c\alpha+c_1\Longrightarrow Q(x,y)=c(x^2-y^2)+c_1, c,c_1\in\mathbb{R}$

   Din condiţiile Cauchy-Riemann obţinem

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=-2cy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}=-2cx$$

   Integrând a doua ecuaţie şi înlocuind în prima obţinem $P(x,y)=$ $=-2cxy+k$, deci $f(z)=-2cxy+k+\mathrm{i}(c(x^2-y^2)+c_1)\Longrightarrow$ $\Longrightarrow f(z)=c\mathrm{i}z^2+d, c,d\in\mathbb{R}$

4. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcţia $f(z) = \frac{1}{z^3-6z^2+11z-6}$ în următoarele domenii:

   a) $|z| < 1$;

   b) $1 < |z| < 2$;

   c) $2 < |z| < 3$;

   d) $|z| > 3$.

   Soluţie. Funcţia f are ca poli rădăcinile ecuaţiei $z^3-6z^2+11z-6=0$, adică punctele $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3$.

   a) In cercul $|z| < 1$, funcţia f este olomorfă, deci dezvoltabilă în serie Taylor în acest domeniu.

   $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2(z-3)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$

   In acest domeniu avem $|z| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1$. Atunci $f(z) =$
   $= -\frac{1}{2}\sum\limits_{n\geq 0} z^n + \frac{1}{2}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{6}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^n}$

   b) In coroana circulară $2 < |z| < 3$, funcţia f este dezvoltabilă în serie Laurent.

   $f(z) = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$

   In domeniul $1 < |z| < 2$ avem $\left|\frac{z}{2}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \left|\frac{1}{z}\right| < 1$, deci $f(z) =$
   $= \frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{6}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^n}$

   $f(z) = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$

   In domeniul $2 < |z| < 3$ avem $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$

   Atunci $f(z) = \frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{6}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^{n+1}}$

   d) $f(z) = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} + \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}}$

   In acest domeniu $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1, \left|\frac{3}{z}\right| < 1$

   Atunci $f(z) = \frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n} + \frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{3^n}{z^n}$

5. Să se calculeze reziduul funcţiei $f(z) = \frac{1}{z \sin z^2}$ în punctul $z = 0$.

   Soluţie. Avem $\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \Longrightarrow z \sin z^2 =$
   $= z\left(\frac{z^2}{1!} - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \ldots\right) = z^3\left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \ldots\right) \Longrightarrow$
   $\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{z^3\left(1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{5!}-\ldots\right)}$

Există o serie de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ astfel încât $\left(1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{5!}-\ldots\right)\cdot$
$\cdot(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots)=1 \Longrightarrow a_0=1, a_0\cdot 0+a_1\cdot 1=0, a_0\cdot 0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 1=0 \Longrightarrow a_2=0$

Atunci $f(z)=\frac{1}{z^3}\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n=\dfrac{a_0}{z^3}+\dfrac{a_1}{z^2}+\dfrac{a_2}{z}+a_3+\ldots$, deci $\text{Rez}(f,0)=$
$=a_2=0$

6. Să se calculeze integrala $\int_{|z-2\mathrm{i}|=1}\frac{1}{z^2+4}dz$.

Soluţie. $\int_{|z-2\mathrm{i}|=1}\frac{1}{z^2+4}dz=\int_{|z-2\mathrm{i}|=1}\frac{\frac{1}{z+2\mathrm{i}}}{z-2\mathrm{i}}dz=\int_{|z-2\mathrm{i}|=1}\frac{f(z)}{z-2\mathrm{i}}$, unde
$f(z)=$
$=\frac{1}{z+2\mathrm{i}}$

Aplicăm formula integrală a lui Cauchy şi obţinem :
$f(2\mathrm{i})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-2\mathrm{i}|=1}\frac{f(z)}{z-2\mathrm{i}}\Longrightarrow\int_{|z-2\mathrm{i}|=1}\frac{f(z)}{z-2\mathrm{i}}=2\pi\mathrm{i}f(2\mathrm{i})=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4\mathrm{i}}=\frac{\pi}{2}$

7. Să se calculeze integrala $\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z\sin z}{1-z^3}dz,\ \ r>0$.

Soluţie. Conform teoremei lui Cauchy rezultă că $\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z\sin z}{1-z^3}dz=0$

8. Să se calculeze integrala $\int_{|z|=2}\frac{\text{tg}\,z}{z^2}dz$.

Soluţie. Funcţia $f(z)=\frac{\text{tg}\,z}{z^2}$ are ca poli rădăcinile ecuaţiei $z^2\cos z=0$, adică $z=0, 2k\pi\pm\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. In interiorul cercului $|z|=2$ se află polii simpli $0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

Calculăm $\text{Rez}(f,0)=\lim\limits_{z\to 0} z\cdot\dfrac{\text{tg}\,z}{z^2}=1$

$\text{Rez}(f,\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{\text{tg}\,z}{z^2}=\lim\limits_{v\to 0} v\cdot\dfrac{-\text{ctg}\,v}{\left(v+\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\dfrac{4}{\pi^2}$

$\text{Rez}(f,-\frac{\pi}{2})=-\frac{4}{\pi^2}$

Din teorema reziduurilor obţinem :
$\int_{|z|=2}\frac{\text{tg}\,z}{z^2}dz=2\pi\mathrm{i}\left(\text{Rez}(f,0)+\text{Rez}(f,\frac{\pi}{2})+\text{Rez}(f,-\frac{\pi}{2})\right)=2\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)$

9. Să se calculeze integrala $\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)}dz, r>0, r\neq 1, r\neq 2$.

Soluţie. 1) Dacă $0<r<1$, aplicăm teorema lui Cauchy si obţinem $\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)}dz=0$

2) Dacă $1<r<2$, aplicăm formula integrală a lui Cauchy.

$\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)}dz=\int_{|z|=r}\frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z-2}}{z-\mathrm{i}}dz=\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}dz$, unde $f(z)=\frac{\mathrm{e}^z}{z-2}$

Atunci $\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}dz=2\pi\mathrm{i}f(\mathrm{i})=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-2}$

3) Dacă $r>2$, aplicăm teorema reziduurilor.

Punctele i şi 2 sunt poli simpli.

Calculăm $\text{Rez}(f,\text{i}) = \lim\limits_{z\to\text{i}}(z-\text{i})\dfrac{\text{e}^z}{(z-\text{i})(z-2)} = \dfrac{\text{e}^{\text{i}}}{\text{i}-2}$

$\text{Rez}(f,2) = \lim\limits_{z\to 2}(z-2)\dfrac{\text{e}^z}{(z-\text{i})(z-2)} = \dfrac{\text{e}^2}{2-\text{i}}$

Atunci $\int_{|z|=r} \frac{\text{e}^z}{(z-\text{i})(z-2)}dz = 2\pi\text{i}\left(\frac{\text{e}^{\text{i}}}{\text{i}-2} + \frac{\text{e}^2}{2-\text{i}}\right) = \frac{\text{e}^{\text{i}}-\text{e}^2}{\text{i}-2}$

10. Să se calculeze integrala $\int_{|z|=r} \frac{\text{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz, r>0, r\neq 1$.

Soluţie. Funcţia $f(z) = \frac{\text{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ are în $z=1$ pol simplu şi în $z=0$ singularitate esenţială.

$\text{Rez}(f,1) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)\cdot\dfrac{\text{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z} = -\text{e}$

Pentru $0<|z|<1$ avem $f(z) = \left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots\right)\cdot$
$\cdot(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots) \Longrightarrow \text{Rez}(f,0) = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots =$
$=\text{e}-1$(coeficientul lui $\frac{1}{z}$)

Dacă $0<r<1$, $\int_{|z|=r}\frac{\text{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz = 2\pi\text{i}\text{Rez}(f,0) = 2\pi\text{i}(\text{e}-1)$

Dacă $r>1$, $\int_{|z|=r}\frac{\text{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz = 2\pi\text{i}(\text{Rez}(f,0)+\text{Rez}(f,1)) = -2\pi\text{i}$

11. Să se calculeze integrala $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 3t}{5-4\cos t}dt$.

Soluţie. Facem schimbarea $z=\text{e}^{\text{i}t}$ şi integrala devine $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 3t}{5-4\cos t}dt =$
$= \int_{|z|=1}\frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5-4\cdot\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\cdot\frac{dz}{\text{i}z}dz = -\frac{1}{2\text{i}}\int_{|z|=1}\frac{z^6+1}{z^3(2z^2-5z+2)}dz$

Polii funcţiei $f(z) = \frac{z^6+1}{z^3(2z^2-5z+2)}$ sunt $0, 2, \frac{1}{2}$ şi doar 0, pol triplu şi $\frac{1}{2}$, pol simplu, sunt în interiorul cercului $|z|=1$. Aplicând teorema reziduurilor obţinem $\int_{|z|=1}\frac{z^6+1}{z^3(2z^2-5z+2)}dz = 2\pi\text{i}(\text{Rez}(f,0)+\text{Rez}(f,2))$

Calculăm $\text{Rez}(f,0) = \frac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}[z^3 f(z)]'' = \dfrac{1}{2}$

$\text{Rez}(f,\frac{1}{2}) = \lim\limits_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\dfrac{1}{2}\right)f(z) = -\dfrac{1+2^6}{3\cdot 2^2}$

Deci $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 3t}{5-4\cos t}dt = -\frac{1}{2\text{i}}\cdot 2\pi\text{i}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1+2^6}{3\cdot 2^2}\right)$

12. Să se calculeze integrala $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$.

Soluţie. $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha\cdot\dfrac{x^2}{(1+x^2)^3} = 1$ pentru $\alpha = 4 > 1$, deci integrala $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$ este convergentă.

Funcţia $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$ este pară, deci $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$

Fie $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}, z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$ olomorfă

$\pm$i sunt poli de ordinul 3

Fie $r > 1$ şi $\Gamma_r = [-r, r] \cup \gamma_r$, unde $\gamma_r = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$

Aplicăm teorema reziduurilor şi obţinem $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Rez}(f, \mathrm{i})$

$\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i}) = \frac{1}{2!}\lim\limits_{z \to \mathrm{i}} \left[(z - \mathrm{i})^3 \left(\dfrac{z^2}{(1+z^2)^3}\right)\right]'' = -\dfrac{\mathrm{i}}{16}$

Deci $\int_{\Gamma_r} f(z)dz = \frac{\pi}{8}$

Dar $\frac{\pi}{8} = \int_{\Gamma_r} f(z)dz = \int_{-r}^{r} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz$. In această relaţie trecem la limită când $r \longrightarrow \infty$ şi obţinem $\frac{\pi}{8} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$, deoarece $\lim\limits_{r \to \infty} \displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$ cf. lemei lui Jordan ($\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = \lim\limits_{z \to \infty} z \cdot \dfrac{z^2}{(1+z^2)^3} = = 0$). Aşadar, $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx = \frac{\pi}{16}$

18.17 Spaţii metrice. Principiul contracţiei

1. Să se demonstreze că următoarele aplicaţii sunt distanţe pe R^2, echivalente cu distanţa euclidiană :
a. $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.
b. $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.
Soluţie
Se verifică direct definiţia distanţei. Fie d_2 distanţa euclidiană pe R^2 şi fie $(x, y) \in R^2$; din inegalităţile:

$$\sqrt{|x|^2 + |y|^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2\left(|x|^2 + |y|^2\right)},$$

$$\frac{1}{2}\left(|x| + |y|\right) \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|,$$

rezultă :

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \sqrt{2}\, d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

şi respectiv

$$\frac{1}{2} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

2. Să se caracterizeze şirurile convergente şi şirurile Cauchy într-un spaţiu metric discret. Să se demonstreze că orice spaţiu metric discret este complet.
Soluţie
Fie (X, d) un spaţiu metric discret şi fie x_n un şir în X; fie $0 < \varepsilon < 1$. Dacă $x_n \rightarrow a$, atunci există $n_\varepsilon \in N$ astfel încât

$d(x_n, a) < \varepsilon < 1, \forall n \geq n_\varepsilon$, deci $d(x_n, a) = 0, \forall n \geq n_\varepsilon$; rezultă că şirul x_n este constant (începând de la un rang). Un raţionament similar se aplică şi în cazul şirurilor Cauchy.

3. Pe mulţimea numerelor raţionale, Q, considerăm distanţa uzuală (indusă din R), $d(x, y) = |x - y|$. Să se demonstreze că spaţiul metric (Q, d) nu este complet.
Soluţie
Fie şirul de numere raţionale $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Se ştie că în R şirul x_n este convergent la $e \in R \setminus Q$. Rezultă că x_n este şir Cauchy în R, deci şi în Q; dacă x_n ar fi convergent în Q, atunci în R ar avea două limite, ceea ce constituie o contradicţie.

4. Fie $a, b \in R, a < b$.
a. Să se demonstreze că
$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$
este distanţă pe mulţimea funcţiilor continue $\mathcal{C}[a, b]$.
b. Să se demonstreze că orice şir $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ convergent în raport cu distanţa d_∞ este convergent şi în raport cu distanţa d_1, dar reciproca este falsă.
Soluţie
a. Se verifică direct definiţia (se folosesc proprietăţile modulului şi ale integralei).
b. Fie $f_n, f \in \mathcal{C}([a, b])$ astfel încât $d_\infty(f_n, f) \to 0$. Atunci:
$$d_1(f_n, f) = \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b - a) \cdot d_\infty(f_n, f) \to 0.$$
Pentru a arăta că reciproca este falsă, fie şirul $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx}$.
Atunci $f_n \to 0$ în raport cu distanţa d_1, dar nu converge în raport cu d_∞.

5. **a.** Să se demonstreze că aplicaţia
$$d : R \times R \mapsto [0, \infty), d(x, y) = |\text{arctg} x - \text{arctg} y|, \forall x, y \in R,$$
este distanţă pe R.
b. Spaţiul metric (R, d) nu este complet.
Soluţie

a. Funcţia arctg este injectivă, deci $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.
b. Sirul $x_n=n$ este şir Cauchy în raport cu distanţa d:

$$d(x_n,x_m)=|\operatorname{arctg} n-\operatorname{arctg} m|=\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{n-m}{1+nm}\right)\right|\to 0,$$

dacă $m,n\to\infty$.
Presupunând, prin absurd, că şirul x_n este convergent la $a\in R$, atunci $d(x_n,a)\to 0$; pe de altă parte:

$$d(x_n,a)=|\operatorname{arctg} n-\operatorname{arctg} a|=$$

$$=\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{n-a}{1+na}\right)\right|\to\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)\right|\neq 0,\forall a\in R,$$

contradicţie.

6. Să se decidă dacă următoarele funcţii sunt contracţii pe mulţimile indicate:
a. $f(x)=\sin x$, $x\in R$.
b. $f(x)=\ln x$, $x\in[e,\infty)$.
c. $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x\in R$.
d. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{5(1+x^2)}$, $x\in R$.
e. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $x\in R$.
Soluţie.
a. Funcţia $f(x)=\sin x$ nu este contracţie pe R.

Presupunând prin absurd că ar exista $k\in(0,1)$ astfel încât $|\sin x-\sin y|\le k\,|x-y|$, $\forall x,y\in R$, atunci, în particular pentru $y=0$, se obţine $|\sin x|\le k\,|x|$, $\forall x\in R$; de unde rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{|x|}\le k<1$, contradicţie. Funcţia sinus este totuşi contracţie pe orice interval închis care nu conţine numere de forma $k\pi,\forall k\in Z$ (pentru demonstraţie se poate aplica teorema lui Lagrange).
b. Funcţia $f(x)=\ln x$ este contracţie pe $[e,\infty)$; din teorema lui Lagrange rezultă :

$$|\ln x-\ln y|\le\left(\sup_{c\ge e}\frac{1}{c}\right)|x-y|\le\frac{1}{e}\,|x-y|,\forall x,y\in R.$$

c. Funcţia $f(x)=\operatorname{arctg} x$ nu este contracţie pe R; fie, prin absurd, $k\in(0,1)$ astfel încât $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\le k\,|x-y|$, $\forall\,x,y\in R$. In particular pentru $y=0$ rezultă $|\operatorname{arctg} x|\le k\,|x|,\forall\,x\in R$ şi deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\operatorname{arctg} x|}{|x|}\le k<1$, contradicţie. Funcţia $f(x)=\operatorname{arctg} x$ este contracţie pe orice interval I pentru care 0 nu este punct de acumulare, deoarece, pe un astfel de interval are loc inegalitatea $\sup\limits_{x\in I}|f'(x)| < 1$.

d. Funcţia nu este contracţie pe R; raţionament similar cu exemplele a şi c de mai sus.

e. Funcţia este contracţie pe R.

7. Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} soluţia reală a ecuaţiei $x^3 + 4x - 1 = 0$.

Soluţie.

Ecuaţia are o singură soluţie reală, $\xi \in (0, 1)$. Vom aplica metoda aproximaţiilor succesive. Fie $X = [0, 1]$ şi $f : X \mapsto X$, $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Ecuaţia este echivalentă cu $f(x) = x$, iar spaţiul metric X este complet (cu metrica uzuală indusă din R); demonstrăm acum că f este contracţie pe X. Derivata este $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$, iar $\sup_{x\in X}|f'(x)| = -f'(1) = \frac{2}{25} < 1$, deci f este contracţie cu factorul factorul de contracţie $k = \frac{2}{25}$. Sirul aproximaţiilor succesive este

$$x_0 = 0, x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n^2 + 4};$$

evaluarea erorii:

$$|x_n - \xi| < \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1| = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{25}\right)^n,$$

deci $\xi \approx x_3 = f\left(\frac{16}{65}\right) = 0,2355072$.

Aceeaşi ecuaţie se poate rezolva aproximativ şi folosind contracţia $g(x) = \frac{1}{4}(1 - x^3), x \in [0, 1]$. In acest caz factorul de contracţie este $k = \sup\limits_{x\in(0,1)} |g'(x)| = \dfrac{3}{4}$. Metoda aproximaţiilor succesive converge mult mai încet în acest caz, $\xi \approx x_6$.

8. Fie $a, b, c \in R$; în ce condiţii se poate aplica metoda aproximaţiilor succesive ecuaţiei: $x = a \sin x + b \cos x + c$?

Soluţie

Fie $f : R \mapsto R$, $f(x) = a \sin x + b \cos x + c$. Funcţia f se poate scrie sub forma:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x\right) + c =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi) + c,$$

cu $\phi \in R$ bine ales. Rezultă că aplicaţia f este contracţie dacă şi numai dacă $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$; dacă această ipoteză este adevărată, atunci un şir al aproximaţiilor succesive este (de exemplu) $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Eroarea la pasul n este cel mult $\dfrac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n}{1-\sqrt{a^2+b^2}}|b+c|$.

Bibliografie

[1] K.R. Davidson, A.P. Donsig, *Real Analysis with Real Applications*, Prentice Hall, 2002.

[2] B.P. Demidovitch, *Culegere de probleme si exercitii de analiza matematica*, Ed Tehnica, 1956. (other editions, Mir Publishers).

[3] N. Donciu, D. Flondor, *Analiza matematica, culegere de probleme*, Ed ALL, 2004.

[4] G. M. Fihtenholţ , *Curs de calcul diferenţial şi integral (vol II-III)*, Ed.Tehnică, 1964.

[5] P. Flondor, O. Stanasila, *Lectii de analiza matematica si exercitii rezolvate*, Ed ALL, 2004.

[6] G.B. Folland, *Advanced Calculus*, Prentice Hall, 2002.

[7] M. Olteanu, *Analiza Matematica - notiuni teoretice si probleme rezolvate*, Ed. Printech, 2005.

[8] Gh. Oprisan, O. Stanasila, *Analiza matematica in 14 lectii*, Ed. Printech, 2006.

[9] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill, 1976.

[10] O. Stănăşilă et al, *Enciclopedie Matematică* , Ed. AGIR, 2010.